This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

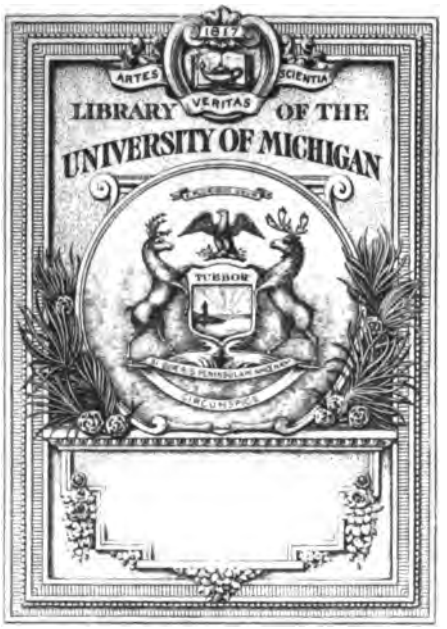
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

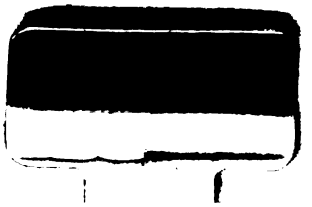
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Mathematics
QA
371
.B344v.
B 492389

Digitized by Google





Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
371
.B344v

Von den

Integralen

gewisser

Differential-Gleichungen,

welche

in der Theorie der Anziehung vorkommen.

Abhandlung

von

C. Gustav Bauer, Dr. phil.

München 1857.

Druck der Dr. Wild'schen Buchdruckerei (Parcus).

Digitized by Google

Digitized by Google

QA
371
.B344v

1. Ist $f(\Theta, \psi)$ eine Funktion von zwei Winkeln Θ und ψ, so kann man sie bekanntlich nach Laplace *) in eine Reihe

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n + \cdots, \qquad \text{I.}$$

entwickeln, wo Y_n ein Polynom von $\cos\Theta$, $\sin\Theta \sin\psi$ und $\sin\Theta \cos\psi$ vom n^{ten} Grade ist, bestimmt durch die Gleichung

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\Theta' \, d\Theta' \int_0^{2\pi} f(\Theta', \psi') \, P_n \, d\psi'$$

Setzt man, um abzukürzen, $\cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi - \psi') = p$, so ist hier P_n der Coefficient von r^n in der Entwicklung von $(1 - 2rp + r^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von r und ein ähnliches Polynom, wie Y_n. Beide Polynome nämlich P_n wie Y_n sind partikuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung,

$$\frac{d \cdot \sin\Theta \frac{dy}{d\Theta}}{\sin\Theta \cdot d\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta} \cdot \frac{d^2y}{d\varphi^2} + n(n+1)\, y = 0 \qquad \text{III.}$$

Ist die Funktion f unabhängig von ψ, so wird

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} f(\Theta') \sin\Theta' \, d\Theta' \int_0^{2\pi} P_n \, d\psi'$$

Nun kann aber nach Laplace **) P_n unter die folgende Form gebracht werden

$$P_n = \sum_{m=0}^{m=n} a_{n,m} \, P_{n,m} \, P'_{n,m} \cos m(\psi - \psi')$$

wo $a_{n,m}$ eine Constante, und $P_{n,m}$ ein Polynom von $\cos\Theta$, oder, wenn man $\cos\Theta = x$ setzt, von x ist, welches der Gleichung genügt

*) Mécanique céleste. Livre III. Chap. II.

**) Ebendaselbst.

141810

Digitized by Google

$$\frac{d.(1-x^2)\,\frac{d.P_{n,m}}{dx}}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P_{n,m} = 0 \qquad \text{IV.}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von P_n in das Integral $\int_0^{2\pi} P_n\, d\psi'$ und bemerkt, dass $\int_0^{2\pi} \cos m\,(\psi-\psi')\, d\psi' = 0$ ist, ausser für $m = 0$, in welchem Falle es $= 2\pi$ wird, so erhält man

$$Y_n = \tfrac{2n+1}{2} \cdot a_{n,0} \int_{-1}^{+1} f(x')\, P'_{n,0}\, dx'$$

Es ist aber $\sqrt{a_{n,0}} \cdot P_{n,0}$ dasselbe Polynom von $\cos\Theta$ oder x, welches P_n von p ist. Bezeichnen wir daher mit X_n und X'_n das, was P_n wird, wenn man darin x oder x' statt p setzt, so erhält man

$$Y_n = \tfrac{2n+1}{2}\, X_n \int_{-1}^{+1} f(x')\, X'_n\, dx$$

und obige Reihenentwicklung wird

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \cdots + A_n X_n + \cdots \qquad \text{V.}$$

wo

$$A_n = \tfrac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x')\, X'_n\, dx' \qquad \text{ist.}$$

Was die Convergenz solcher Entwicklungen nach Polynomen X betrifft, so ist sie durch die Ableitung derselben aus der Reihe I. für zwei Variable, deren Convergenz streng bewiesen ist *), ausser Zweifel gestellt, vorausgesetzt, dass $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x = +1$ und $x = -1$ endlich bleibt, indem der entgegen gesetzte Fall die Coefficienten A unendlich und mithin eine solche Entwicklung unmöglich machen würde.

Die partielle Differentialgleichung III. reducirt sich in diesem Falle auf

$$\frac{d.(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}}{dx} + n\,(n+1)\,y = 0 \qquad \text{VI}$$

und $X_n = y$ ist ein partikuläres Integral derselben.

Ausser dieser Differentialgleichung genügen die Polynomen X bekanntlich der Relation

$$(n+1)\,X_{n+1} - (2n+1)\,x \,.\, X_n + n\,X_{n-1} = 0 \qquad \text{VII.}$$

Nach Potenzen von x ausgedrückt sind sie

$$X_0 = 1,\ X_1 = x,\ X_2 = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},\ X_3 = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x \quad \text{u. s. f.}$$

und allgemein

*) „Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles“ p. Dirichlet. Crelle's Journal Bd. XVII.

Digitized by Google

$$X_n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{1.2.3...n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}.x^{n-4} - + \cdots\right)$$

Zwischen den Grenzen $x = +1$ und $x = -1$ schwankt ihr Werth zwischen denselben Grenzen und an diesen Grenzwerthen von x erhalten sie den numerischen Werth 1. Auch ist bekannt, dass sie die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass, wenn n und m ungleich sind,

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m \, dx = 0 \qquad \text{VIII.}$$

und wenn $n = m$ ist,

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} \qquad \text{IX.}$$

ist.

Seit Legendre diese Polynome in die Analysis einführte *), sind sie fast in allen Zweigen der mathematischen Physik angewandt worden und es mag daher einigermassen befremden, dass man das zweite partikuläre Integral der Gleichung VI., von welchem man voraussetzen konnte, dass es mit diesen Polynomen in nahem Zusammenhange stehe, noch nicht näher untersucht hat. In einer Arbeit über die Wärmevertheilung in Ellipsoiden **) hat Heine dieses Integral in Form einer unendlichen Reihe angewandt und zugleich aus der Reihe eine Relation gesucht, mittelst welcher dieselbe für die verschiedenen Werthe von n allmählig berechnet werden kann. Sonst ist mir über diesen Gegenstand nichts bekannt geworden.

Die Aufsuchung nun dieses Integral in endlicher Form und die Untersuchung seiner Eigenschaften ist der hauptsächliche Inhalt des Folgenden, und es wird sich hiebei auch zugleich das vollständige Integral der partiellen Differentialgleichung III. in einer für die Anwendung brauchbaren Form herausstellen.

2. Das Polynom X_n ist ein partikuläres Integral der Gleichung

$$\frac{d.(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0$$

Ist nun y eine andere Funktion von x, welche dieser Gleichung genügt, so hat man

$$\frac{d.(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx} + n(n+1)y = 0 \qquad (1.$$

*) Ac. d. Sc. 1784. „Recherches sur la figure des Planètes."

**) Crelle's Journ. Bd. XXVI.

Digitized by Google

Aus diesen beiden Gleichungen folgt sogleich

$$y \cdot \frac{d.(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} - X_n \cdot \frac{d.(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx} = 0$$

oder

$$\frac{d.}{dx}(1-x^2)\left(y.\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

mithin

$$(1-x^2)\left(y.\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dy}{dx}\right) = C$$

wo C eine beliebige Constante bezeichnet. Hieraus ergibt sich

$$y = \left(C\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2} + C'\right)X_n$$

als das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung. C′ ist hier eine zweite willkürliche Constante und C′X$_n$ das bekannte partikuläre Integral, während

$$X_n\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2}$$

das zu bestimmende andere Integral ist, welches ich mit Y$_n$ bezeichnen will. Man sieht nun zunächst, dass

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2} = \int\frac{dx}{1-x^2} + X_n\int\frac{1-X_n^2}{1-x^2}\cdot\frac{dx}{X_n^2}$$

ist. Das erste dieser Integrale ist $= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ und es wird mithin

$$Y_n = \tfrac{1}{2}X_n\log\frac{1+x}{1-x} + X_n\int\frac{Q_n\,dx}{X_n^2}$$

wenn $\frac{1-X_n^2}{1-x^2} = Q_n$ gesetzt wird. Da X_n^2 für $x = \pm 1$ den Werth $+1$ annimmt, so ist $1-X_n^2$ durch $1-x^2$ theilbar und mithin Q_n ein Polynom vom $(2n-2)^{ten}$ Grad mit nur geraden Potenzen von x.

Nun hat aber Legendre gezeigt, dass die Gleichung $X_n = 0$ weder imaginäre noch gleiche Wurzeln hat, und man kann sich davon leicht auf folgende Weise überzeugen. Wäre z. B. $x = a + b\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel der Gleichung $X_n = 0$, so müsste $x = a - b\sqrt{-1}$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung seyn, und man könnte daher $X_n = [(x-a)^2 + b^2]\varphi$ setzen, wo φ ein Polynom von $(n-2)^{ten}$ Grade wäre. Dieses φ könnte man sich durch eine Reihe von X ausgedrückt denken, und da der Index aller darin vorkommenden X kleiner als n wäre, so müsste nach VIII. $\int_{-1}^{+1} X_n\varphi\,dx = 0$, also auch

$$\int_{-1}^{+1}[(x-a)^2 + b^2]\varphi^2\,dx = 0$$

Digitized by Google

seyn, was offenbar unmöglich ist, da alle Elemente des Integrals positiv sind. Auf dieselbe Weise lässt sich beweisen, dass die Gleichung $X_n = 0$ auch keine gleichen reellen Wurzeln hat.

Da ferner X_n nur gerade Potenzen von x enthält, wenn n gerade, nur ungerade, wenn n ungerade, so hat die Gleichung $X_n = 0$, (die Wurzel $x = 0$ für ungerade n ausgenommen) je zwei numerisch gleiche Wurzeln von verschiedenen Zeichen. Bezeichnet man daher die positiven Wurzeln von $X_n = 0$ mit $\alpha, \beta, \gamma \cdots$, so kann man setzen, wenn n gerade

$$X_n = M(x^2 - \alpha^2)(x^2 \quad \beta^2)(x^2 - \gamma^2)\cdots$$

und wenn n ungerade

$$X_n = M \cdot x\,(x^2 - \alpha^2)\,(x^2 - \beta^2)\,(x^2 - \gamma^2)\ldots$$

wo M der Coefficient von x^n in X_n ist, also in beiden Fällen

$$M = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3..n}.$$

Dieses vorausgeschickt, wird man nun, wenn n gerade, $\frac{Q_n}{X_n^2}$ auf folgende Art in Partialbrüche zerlegen können.

$$\frac{Q_n}{X_n^2} = \frac{A_1 + B_1 x^2}{(x^2 - \alpha^2)^2} + \frac{A_2 + B_2 x^2}{(x^2 - \beta^2)^2} + \cdots$$

Für jeden solchen Partialbruch erhält man in dem Integral $\frac{Q_n}{X_n^2}\,dx$ einen Ausdruck von der Form

$$\frac{A_1 + B_1\alpha^2}{2\alpha^2(\alpha^2 - x^2)} \cdot x + \frac{A_1 - B_1\alpha^2}{4\alpha^3} \log\frac{\alpha + x}{\alpha - x}$$

und man hat also

$$X_n \int \frac{Q_n}{X_n^2}\,dx = -\Sigma \frac{A_1 + B_1\alpha^2}{2\alpha^2} \cdot \frac{X_n}{x^2 - \alpha^2} \cdot x + X_n \Sigma \frac{A_1 - B_1\alpha^2}{4\alpha^3} \log\frac{\alpha + x}{\alpha - x}$$

wo sich das Summenzeichen Σ auf alle positiven Wurzeln von $X_n = 0$ erstreckt.

Setzen wir nun $X_n \int \frac{Q_n}{X_n^2}\,dx = -Z_n$ und substituiren wir $Y_n = \frac{1}{2} X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n$ statt y in die Gleichung (1.), so erhält man, da X_n ein Integral dieser Gleichung ist, mithin bei der Substitution der Coefficient von $\log\frac{1+x}{1-x}$ Null wird, für Z_n folgende Gleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2 Z_n}{dx^2} - 2x\frac{dZ_n}{dx} + n(n+1)Z_n = 2 \cdot \frac{dX_n}{dx} \qquad (2.$$

Digitized by Google

Setzt man hierin für Z_n den oben für $-X_n\int\frac{Q_n}{X_n^2}dx$ gefundenen Ausdruck und fasst alle Glieder, welche ein Polynom geben, unter der Bezeichnung Π zusammen, so folgt, da die Coefficienten von $\log\frac{\alpha+x}{\alpha-x}, \log\frac{\beta+x}{\beta-x}, \ldots$ Null werden,

$$\Pi + (1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\sum\frac{A_1-B_1\alpha^2}{4\alpha^3}\cdot\frac{2}{\alpha^2-x^2} = 0$$

Da nun X_n keine gleichen Faktoren enthält, so ist $\frac{dX_n}{dx}$ nicht durch α^2-x^2 theilbar und die Glieder unter dem Summenzeichen können sich nicht gegenseitig aufheben, indem alle Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots$ von einander verschieden sind. Soll also diese Gleichung für alle Werthe von x bestehen, so muss

$$A_1 = B_1\alpha^2, \quad A_2 = B_2\beta^2, \quad A_3 = B_3\gamma^2 \text{ u. s. f.}$$

sein. Hierdurch wird

$$\frac{Q_n}{X_n^2} = B_1\cdot\frac{\alpha^2+x^2}{(\alpha^2-x^2)^2} + B_2\cdot\frac{\beta^2+x^2}{(\beta^2-x^2)^2} + \ldots \quad \text{(a.}$$

$$\int\frac{Q_n}{X_n^2}dx = \frac{B_1 x}{\alpha^2-x^2} + \frac{B_2 x}{\beta^2-x^2} + \ldots = \sum\frac{B_1 x}{\alpha^2-x^2} \quad \text{(b.}$$

und

$$Z_n = -X_n\int\frac{Q_n}{X_n^2}dx = \sum\frac{B_1 X_n}{x^2-\alpha^2}\cdot x \quad \text{(c.}$$

Ist also n gerade, wie ich voraussetzte, so ist Z_n ein Polynom vom $(n-1)^{ten}$ Grad und enthält nur ungerade Potenzen von x.

Die Coefficienten $B_1, B_2, \ldots$ können aus der Gleichung

$$Q_n = \frac{1-X_n^2}{1-x^2} = \Sigma B_1\cdot\frac{\alpha^2+x^2}{(\alpha^2-x^2)^2}X_n^2$$

bestimmt werden. Setzt man nämlich hierin für x der Reihe nach alle verschiedenen Wurzeln von $X_n=0$, so erhält man

$$B_1 = \frac{1}{M^2}\cdot\frac{1}{2\alpha^2(1-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)^2(\alpha^2-\gamma^2)^2\ldots},$$

$$B_2 = \frac{1}{M^2}\cdot\frac{1}{2\beta^2(1-\beta^2)(\beta^2-\alpha^2)^2(\beta^2-\gamma^2)^2\ldots}$$

u. s. f.

wo $M = \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}$ ist.

Ist n ungerade, so ist bei der Zerlegung von $\frac{Q_n}{X_n^2}$ in Partialbrüche noch der

Digitized by Google

Bruch $\frac{B_0}{x^2}$ beizufügen, welcher im Integral $\int \frac{Q_n}{X_n^2} dx$ das Glied $-\frac{B_0}{x}$ und mithin in Z_n das Glied $B_0 \frac{X_n}{x}$ hervorbringt, so dass in diesem Falle

$$Z_n = B_0 \frac{X_n}{x} + \Sigma \frac{B_1 X_n}{x^2 - \alpha^2} . x \qquad \text{(d.}$$

wird. Ist also n ungerade, so ist Z_n ebenfalls ein Polynom vom $(n-1)^{ten}$ Grade und enthält nur gerade Potenzen von x. Die Coefficienten $B_1, B_2, \ldots$ bestimmen sich auf dieselbe Art wie vorhin, wie folgt:

$$B_1 = \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{2\alpha^4 (1-\alpha^2) (\alpha^2-\beta^2)^2 (\alpha^2-\gamma^2)^2 \ldots},$$

$$B_2 = \frac{1}{M^2} \frac{1}{2\beta^4 (1-\beta^2) (\beta^2-\alpha^2)^2 (\beta^2-\gamma^2)^2 \ldots}$$

u. s. f.

Was B_0 anbetrifft, so ergibt es sich $= \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{\alpha^4 \beta^4 \gamma^4 \ldots}$ Es ist aber M. $\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \ldots$ das von x unabhängige Glied in $\frac{X_n}{x}$, welches aus der Formel für X_n in n° 1. $= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5..n}{2.4.6..(n-1)}$ gefunden wird. Mithin ist

$$B_0 = \frac{2^2 4^2 6^2 \ldots (n-1)^2}{3^2 5^2 7^2 \ldots n^2}$$

Man sieht auch sogleich, dass, während $Z_{2n} = 0$ wird, für $x=0$, Z_{2n+1} sich für diesen Werth von x auf das Glied $B_0 \frac{X_n}{x}$ reduzirt, mithin

$$Z_{2n+1} = (-1)^n \frac{2.4. \ldots .2n}{3.5 \ldots (2n+1)} \qquad \text{(e.}$$

wird, für $x=0$.

Ueberhaupt wird für irgend eine Wurzel $x=\alpha$ der Gleichung $X_{2n} = 0$

$$Z_{2n} = \frac{1.2.3. \ldots 2n}{1.3.5. \ldots (4n-1)} \cdot \frac{1}{2\alpha (1-\alpha^2) (\alpha^2-\beta^2) (\alpha^2-\gamma^2) \ldots}$$

und für irgend eine Wurzel $x=\alpha$ der Gleichung $X_{2n+1} = 0$, die Wurzel $x = 0$ ausgenommen,

$$Z_{2n+1} = \frac{1.2.3. \ldots (2n+1)}{1.3.5. \ldots (4n+1)} \cdot \frac{1}{2\alpha^2 (1-\alpha^2) (\alpha^2-\beta^2) (\alpha^2-\gamma^2) \ldots}$$

und man sieht daher, dass Z_n und X_n nie zugleich Null werden können.

Digitized by Google

Es ist nun das gesuchte Integral

$$Y_n = \tfrac{1}{2} X_n \log \frac{1+x}{1-x} - Z_n \qquad (3.$$

der Form nach vollkommen bestimmt. Wir werden später für Z_n von den Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots$ unabhängige Ausdrücke erhalten; für jetzt sei nur bemerkt, dass aus der Herleitung von Z_n sich unmittelbar ergibt, dass $Z_0 = 0$ und $Z_1 = 1$ ist.

Ich habe bei der Aufsuchung des Integrals Y_n keine Voraussetzung in Bezug auf den Werth von x gemacht. Es gilt mithin sowohl für $x < 1$ als für $x > 1$; nur ist in dem letztern Falle $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$ statt $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ für $\int \frac{dx}{1-x^2}$ zu nehmen, mithin

$$Y_n = \tfrac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n \qquad (3.'$$

In dem Folgenden werde ich zunächst immer $x < 1$ voraussetzen, wenn ich nicht das Gegentheil bemerke und man wird leicht unterscheiden, welche von den erhaltenen Ausdrücken auch für $x > 1$ gültig bleiben. Später werde ich den Fall, in welchem $x > 1$ ist, noch besonders betrachten.

3. Ist Y_m ein solches Integral der Gleichung 1.), wenn man darin m statt n setzt, so hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{\text{d.}\,(1-x^2)\,\frac{dY_n}{dx}}{dx} + n\,(n+1)\,Y_n = 0\,, \quad \frac{\text{d.}\,(1-x^2)\,\frac{dY_m}{dx}}{dx} + m\,(m+1)\,Y_m = 0$$

woraus sogleich folgt

$$(1-x^2)\left(Y_m \frac{dY_n}{dx} - Y_n \frac{dY_m}{dx}\right) + [n\,(n+1) - m\,(m+1)] \int Y_n Y_m\, dx = 0$$

Nun ist aber

$$(1-x^2)\left(Y_m \frac{dY_n}{dx} - Y_n \frac{dY_m}{dx}\right) = \tfrac{1}{4}(1-x^2)\left(\log \frac{1+x}{1-x}\right)^2 \left(X_m \frac{dX_n}{dx} - X_n \frac{dX_m}{dx}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}(1-x^2) \log \frac{1+x}{1-x} \left(X_m \frac{dZ_n}{dx} - X_n \frac{dZ_m}{dx} + Z_m \frac{dX_n}{dx} - Z_n \frac{dX_m}{dx}\right)$$
$$- (1-x^2)\left(Z_m \frac{dZ_n}{dx} - Z_n \frac{dZ_m}{dx}\right) - (Z_m X_n - Z_n X_m)$$

Da nun $\alpha \log \alpha = 0$ und $\alpha \log^2 \alpha = 0$ ist, wenn $\alpha = 0$ wird, so erhält man, wenn man das Integral von $x = +1$ bis $x = -1$ nimmt

$$[n\,(n+1) - m\,(m+1)] \int_{-1}^{+1} Y_n Y_m\, dx = (Z_n X_m - Z_n X_m)_{x=+1} - (Z_m X_n - Z_n X_m)_{x=-1}$$

Da nun Z immer um einen Grad niedriger ist als X mit gleichem Index, so enthalten $Z_m X_n$ und $Z_n X_m$ nur ungerade Potenzen von x, wenn n und m beide

Digitized by Google

gerade oder beide ungerade sind, hingegen nur gerade Potenzen von x, wenn eine der Zahlen n, m gerade, die andere ungerade ist, und da ferner $X=1$ ist für $x=1$, so folgt, wenn man mit (Z_n) den Werth von Z_n bezeichnet für $x=1$,

$$\int_{-1}^{+1} Y_n Y_m \, dx = 2. \frac{(Z_m)-(Z_n)}{n(n+1)-m(m+1)}$$

wenn $n+m$ gerade ist; ist $n+m$ ungerade, so ist das Integral $= o$.

Um nun den Werth von Z_n für $x=1$ zu finden, bemerken wir zuerst, dass die wiederholte Differentiation der Gleichung (1.)

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = o$$

gibt

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}X_n}{dx^{m+1}} - 2mx.\frac{d^mX_n}{dx^m} + [n(n+1)-m(m-1)]\frac{d^{m-1}X_n}{dx^{m-1}} = o$$

Setzt man hierin $x=1$ und bezeichnet mit $\left(\frac{d^mX_n}{dx^m}\right)$ den Werth von $\frac{d^mX_n}{dx^m}$ für $x=1$, so erhält man

$$\left(\frac{d^mX_n}{dx^m}\right) = \frac{n(n+1)-m(m-1)}{2m}\left(\frac{d^{m-1}X_n}{dx^{m-1}}\right) = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2m}\left(\frac{d^{m-1}X_n}{dx^{m-1}}\right)$$

also

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right) = \frac{n(n+1)}{2}, \left(\frac{d^2X_n}{dx^2}\right) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4} \text{ u. s. w.}$$

Eben so erhält man aus Gleichung (2.) durch wiederholte Differentiation

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}Z_n}{dx^{m+1}} - 2mx\cdot\frac{d^mZ_n}{dx^m} + (n-m+1)(n+m)\frac{d^{m-1}Z_n}{dx^{m-1}} = 2\cdot\frac{d^mX_n}{dx^m}$$

Setzt man hierin wieder $x=1$ und bezeichnet mit $\left(\frac{d^mZ_n}{dx^m}\right)$ den Werth von $\frac{d^mZ_n}{dx^m}$ für $x=1$, so folgt hieraus, mit Hilfe des eben erhaltenen Werths von $\left(\frac{d^mX_n}{dx^m}\right)$

$$\left(\frac{dZ_n}{dx}\right) = \frac{n(n+1}{2}[(Z_n)-1]$$

$$\left(\frac{d^2Z_n}{dx^2}\right) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4}[(Z_n)-(1+\tfrac{1}{3})]$$

. . . . . .

$$\left(\frac{d^nZ_n}{dx^n}\right) = \frac{1.2.3\ldots2n}{2.4.6\ldots2n}[(Z_n)-(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\cdots+\tfrac{1}{n})]$$

Digitized by Google

Da aber Z_n nur vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist, so muss $\frac{d^n Z_n}{dx^n}$ Null werden; folglich ist

$$(Z_n) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}.$$

Zugleich erhält man

$$\left(\frac{dZ_n}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{dx}\right)(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}), \left(\frac{d^2 Z_n}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 X_n}{dx^2}\right)(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n}) \text{ u. s. f.}$$

woraus sich Z_n nach Potenzen von $1-x$ darstellen liesse.

Vermöge des eben erhaltenen Werthes von (Z_n) wird nun, wenn $n > m$ und $n+m$ gerade ist

$$\int_{-1}^{+1} Y_n Y_m \, dx = 2 \cdot \frac{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(m-n)(m+n+1)} \qquad \text{(f.}$$

Man sieht hieraus, dass das Integral Y nicht die der Gleichung $\int_{-1}^{+1} X_n X_m \, dx = o$ entsprechende Eigenschaft der Funktionen X besitzt.

4. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d.\,(1-x^2)\,\frac{dZ_n}{dx}}{dx} + n\,(n+1)\,Z_n = 2 \cdot \frac{dX_n}{dx}$$

und

$$\frac{d.\,(1-x^2)\,\frac{dX_m}{dx}}{dx} + m\,(m+1)\,X_m = o$$

folgt, wie im vorhergehenden n.°, das Integral

$$[n\,(n+1) - m\,(m+1)] \int_{-1}^{+1} Z_n X_m \, dx = 2 \int_{-1}^{+1} X_m \frac{dX_n}{dx} dx$$

und wenn man n mit m vertauscht, und die so erhaltene Gleichung zu dieser addirt,

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} (Z_n X_m - Z_m X_n)\, dx = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{d.\, X_n X_m}{dx} dx$$
$$= 2\,(X_n X_m)_{x=+1} - 2\,(X_n X_m)_{x=-1}$$

Bemerken wir nun, dass vermöge der Gleichung VIII. eines der beiden Integrale $\int_{-1}^{+1} Z_n X_m \, dx$ und $\int_{-1}^{+1} Z_m X_n \, dx$ immer Null sein muss, nämlich dasjenige, in welchem der Index von X grösser ist als der von Z, so reduzirt sich die vorstehende Gleichung auf folgende, wenn wir $n > m$ annehmen,

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} Z_n X_m \, dx = 2\,(X_n X_m)_{x=+1} - 2 \cdot (X_n X_m)_{x=-1}$$

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich

$$\int_{-1}^{+1} Z_n X_m \, dx = \frac{4}{(n-m)(n+m+1)}$$

wenn $n > m$ und $n+m$ ungerade ist. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so ist das Integral Null.

Combin'ren wir endlich noch die beiden folgenden Gleichungen

$$\text{d. } (1-x^2)\frac{dY_n}{dx} \Big/ dx + n(n+1)\,Y_n = 0\,, \qquad \text{d. } (1-x^2)\frac{dX_m}{dx} \Big/ dx + m(m+1)\,X_m = 0$$

auf ähnliche Weise, so erhält man, da

$(1-x^2)\,Y_n \frac{dX_m}{dx} \doteq 0$ und $(1-x^2)\,X_m \frac{dY_n}{dx} = X_m X_n$ wird, wenn $x = \pm 1$ ist,

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} Y_n X_m \, dx = -(X_n X_m)_{x=+1} + (X_n X_m)_{x=-1}$$

also

$$\int_{-1}^{+1} Y_n X_m \, dx = \frac{-2}{(n-m)(n+m+1)}$$

wenn $n+m$ ungerade ist; im entgegengesetzten Falle ist das Integral $= 0$.

Addirt man die beiden zuletzt erhaltenen Integrale, so ergibt sich zugleich, wenn $n+m$ ungerade ist,

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n X_m \log\frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{+2}{(n-m)(n+m+1)}$$

vorausgesetzt, dass $n > m$ ist.

Mittelst der vorhergehenden Integrale erhält man nun (nach V.) sogleich folgende Entwicklungen nach Polynomen X

$$Z_n = \frac{2n-1}{1.n} X_{n-1} + \frac{2n-5}{3.(n-1)} X_{n-3} + \frac{2n-9}{5\,(n-2)} X_{n-5} + \cdots \qquad (4.$$

$$\tfrac{1}{2} X_n \log\frac{1+x}{1-x} = \Sigma \frac{\pm(2m+1)}{(n-m)(n+m+1)} \cdot X_m \qquad (5.$$

$$Y_n = \tfrac{1}{2} X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n = \Sigma \frac{2m+1}{(m-n)(n+m+1)} \cdot X_m \qquad (6.$$

wo die Summe Σ in 5.) und 6.) sich auf alle geraden Zahlen erstreckt, wenn n ungerade, und auf alle ungeraden, wenn n gerade und in 5.) alle Coefficienten der Reihe positiv zu nehmen sind, in 6.) hingegen jedes Glied mit seinem Zeichen zu nehmen ist, wie es die Formel gibt.

Durch diese letzte Gleichung ist also das vollständige Integral der Gleichung 1.) auf eine Reihe von Polynomen X zurückgeführt.

Digitized by Google

5. Es ist einer der grossen Vortheile, welche die Entwicklungen von Funktionen nach X gewähren, dass, wenn zwei willkürliche Funktionen $\gamma(x)$ und $\varphi(x)$ auf diese Art entwickelt sind, nämlich

$$\gamma(x) = A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + \cdots + A_nX_n + \cdots$$
$$\varphi(x) = A'_0X_0 + A'_1X_1 + A'_2X_2 + \cdots + A'_nX_n + \cdots$$

man sogleich auch das Integral $\int_{-1}^{+1} \gamma(x)\,\varphi(x)\,dx$ in Form einer Reihe angeben kann. Es wird nämlich, wenn man die beiden Reihen mit einander multiplicirt, und dann zwischen den Grenzen $x = \pm 1$ integrirt, vermöge der Gleichungen VIII. und IX.

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \gamma(x)\,\varphi(x)\,dx = A_0A'_0 + \tfrac{1}{3}\cdot A_1A'_1 + \tfrac{1}{5}A_2A'_2 + \cdots + \frac{1}{2m+1}A_nA'_n + \cdots$$

Diese Bemerkung gibt das Mittel an die Hand, den Werth der im vorigen n° gegebenen Integrale zu bestimmen, wenn $n = m$ ist, in welchem Falle dieser Werth nicht unmittelbar aus der Differentialgleichung erhalten werden kann. Es wird nämlich

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} Z_n^2\,dx = \frac{2n-1}{1^2\cdot n^2} + \frac{2n-5}{3^2\cdot(n-1)^2} + \frac{2n-9}{5^2\cdot(n-2)^2} + \cdots$$

und

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} Y_n^2\,dx = \Sigma\,\frac{2m+1}{(n-m)^2\,(n+m+1)^2}$$

Diese Resultate lassen sich leicht auf eine einfachere Form bringen, wenn man bemerkt, dass $\frac{2m+1}{(n-m)^2\,(n+m+1)^2} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{(n-m)^2} - \frac{1}{(m+n+1)^2}\right]$ ist. Hiedurch wird

$$\frac{2n-1}{1^2\cdot(2n)^2} + \frac{2n-5}{3^2\cdot(2n-2)^2} + \cdots = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{(2n-2)^2} + \cdots\right)$$

Die letzten Glieder der Reihe auf der rechten Seite sind $\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$ wenn n gerade und $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ wenn n ungerade. Addirt man daher im ersten Falle $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, im zweiten $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}$ und zieht dieselbe Grösse zugleich ab, so wird die rechte Gleichungsseite

$$\frac{1}{2n+1}\left[\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

Digitized by Google

und mithin $$\int_{-1}^{+1} Z_n^2\,dx = \frac{6}{2n+1}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{(g.}$$

Ebenso geben die Glieder der Reihe für $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} Y_n^2\,dx$ von $m = n+1$ an

$$\frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right) - \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{(2n+2)^2}+\frac{1}{(2n+4)^2}+\cdots\right)$$

und wenn man für die Glieder bis $m = n-1$ ihren oben gefundenen Werth setzt und die negativen Reihen vereinigt, so kommt

$$\frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} - \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2}\right)$$

Nun ist aber

$$\Sigma\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ und } \Sigma\frac{1}{(2m)^2} = \frac{\pi^2}{24}, \text{ also}$$

$$\int_{-1}^{+1} Y_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\pi^2}{12}+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{(h.}$$

Da nach Gleichung (5.) $\frac{1}{8}\int_{-1}^{+1} X_n^2\,(\log\frac{1+x}{1-x})^2\,dx$ denselben Werth hat wie $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} Y_n^2\,dx$, so erhält man zugleich

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\,(\log\frac{1+x}{1-x})^2\,dx = \frac{8}{2n+1}\left(\frac{\pi^2}{12}+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{(i.}$$

6. Aus Gleichung (4.) folgt, für $x=1$, $(Z_n) = \frac{2n-1}{1\,.\,n}+\frac{2n-5}{3(n-1)}+\cdots$

Da wir nun früher $(Z_n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ gefunden haben, so müssen diese beiden Zahlenausdrücke gleich sein. Diess ist leicht zu beweisen. Es ist nämlich allgemein $\frac{2m+1}{(n-m)(n+m+1)} = \frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m+1}$, und hiemit erhält man durch eine ähnliche Umformung wie im vorigen n°.

$$\frac{2n-1}{1\,.\,2n}+\frac{2n-5}{3(2n-2)}+\cdots = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

also

$$(Z_n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad \text{(k.}$$

Digitized by Google

Man ersieht aber zugleich aus Gleichung (4.), dass diess der grösste Werth ist, welchen Z_n innerhalb der Grenzen $x = +1$ und $x = -1$ haben kann, oder vielmehr, dass Z_n innerhalb dieser Grenzen immer kleiner ist, als diese Grösse.

Aus Gleichung (4.) könnte man durch Substitution der Polynome von x an die Stelle der X unmittelbar einen Ausdruck von Z_n nach Potenzen von x erhalten. Dieser Ausdruck würde jedoch sehr verwickelt. Bemerkt man aber, dass zwischen den Polynomen X die Relation besteht VII.

$$x \cdot X_n = \frac{n+1}{2n+1} X_{n+1} + \frac{n}{2n+1} X_{n-1}$$

und setzt man

$$X^n = a_0^{(n)} x_n + a_2^{(n)} x^{n-2} + a_4^{(n)} x^{n-4} + \cdots$$

so erhält man folgende Relationen zwischen den Coefficienten a

$$a_0^{(n)} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot a_0^{(n+1)}, \quad a_2^{(n)} = \frac{n+1}{2n+1} a_2^{(n+1)} + \frac{n}{2n+1} a_0^{(n-1)},$$

$$a_4^{(n)} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot a_4^{(n+1)} + \frac{n}{2n+1} a_2^{(n-1)} \quad \text{u. s. f.}$$

mit deren Hilfe sich Z_n auf folgende Form bringen lässt, welche nur die Coefficienten von X_n enthält.

$$Z_n = a_0^{(n)} x^{n-1} + \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{3} \cdot a_0^{(n)} \\ + \\ a_2^{(n)} \end{matrix} \right\} x^{n-3} + \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{5} a_0^{(n)} \\ + \frac{1}{3} a_2^{(n)} \\ + \\ a_4^{(n)} \end{matrix} \right\} x^{n-5} + \cdots \qquad (7.$$

Da es schwer wäre, aus den vorhergehenden Formeln auf die Natur des Z_n zu schliessen, zumal wenn n sehr gross ist, so will ich noch eine Näherungsformel für Z_n ableiten unter der Voraussetzung, dass n eine sehr grosse Zahl ist und bediene mich hiezu der Näherungsformel, welche Poisson unter derselben Voraussetzung für X_n ableitete und zu Convergenzuntersuchungen benützte *), nämlich

$$X_n = \left(\frac{2}{n\pi \sin \Theta} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[(n + \tfrac{1}{2}) \Theta - \tfrac{1}{4}\pi \right]$$

wo $x = \cos \Theta$ gesetzt ist; eine Formel, welche jedoch nur gilt, so lange Θ nicht sehr nahe $= 0$, oder x nicht sehr nahe $= 1$ ist.

Da in Gleichung (5.) die Summe der Glieder auf der rechten Seite bis $m = n - 1$ inclusive nichts anders ist, als $\frac{1}{2} Z_n$, so ist, wenn wir in dem Rest der Reihe $n + v$ statt m setzen:

$$\tfrac{1}{2} X_n \log \frac{1+x}{1-x} - \tfrac{1}{2} Z_n = \Sigma \frac{2n+2v+1}{v(2n+v+1)} X_{n+v}$$

Nun ist aber $\frac{2n+2v+1}{v(2n+v+1)} = \frac{1}{v} + \frac{1}{2n+v+1}$. Bezeichnen wir daher

*) Connaissance d. Temps 1831.

Digitized by Google

die Summe mit S und vernachlässigen wir die Glieder, welche mit der sehr grossen Zahl $2n + v + 1$ dividirt sind, so wird $S = \Sigma \frac{1}{v} X_{n+v}$. Setzt man hierin für X_{n+v} obigen Ausdruck *) und vernachlässigt wieder Glieder der Ordnung $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ gegen solche der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$, so wird

$$S = \left(\frac{2}{n\pi \sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}} \Sigma \frac{1}{v} \cdot \cos\left[v\Theta + (n+\tfrac{1}{2})\Theta - \tfrac{1}{4}\pi\right]$$

wo in der Summe Σ für v alle ungerade Zahlen zu nehmen sind. Sei nun, um abzukürzen, $(n+\frac{1}{2})\Theta - \frac{1}{4}\pi = \alpha$, so ist

$$\Sigma \frac{1}{v} \cos(v\Theta + \alpha) = \cos\alpha\,(\cos\Theta + \tfrac{1}{3}\cos 3\Theta + \tfrac{1}{5}\cos 5\Theta + \ldots$$
$$- \sin\alpha\,(\sin\Theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\Theta + \tfrac{1}{5}\sin 5\Theta + \ldots$$

oder, da

$$\sin\Theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\Theta + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

---

*) Um die Benützung der Näherungsformel für X_n zur Summation zu rechtfertigen, sei Folgendes bemerkt. Poisson setzt $X_n = u\cos a\Theta + u'\sin a\Theta$, wo $a = \sqrt{n(n+1)}$, subtituirt diesen Ausdruck in Gleichung (1.) und setzt sodann die Coefficienten von $\cos a\Theta$ und $\sin a\Theta$ einzeln = Null, wodurch er zur Bestimmung von u und u' die beiden Gleichungen

$$2\frac{du}{d\Theta} + u\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} = \frac{1}{a}\left(\frac{d^2u'}{d\Theta^2} + \frac{du'}{d\Theta}\cdot\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\right),$$
$$2\frac{du'}{d\Theta} + u'\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} = -\frac{1}{a}\left(\frac{d^2u}{d\Theta^2} + \frac{du}{d\Theta}\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\right)$$

erhält. Poisson vernachlässigt nun die mit $\frac{1}{a}$ multiplicirten Glieder, woraus $u\sqrt{\sin\Theta} = H$ und $u'\sqrt{\sin\Theta} = H'$ und nach Bestimmung der beiden Constanten H und H' obiger Ausdruck für X_n folgt. Berücksichtigt man aber noch die erste Potenz von $\frac{1}{a}$, so kommt in dem Ausdruck für X_n noch das Glied

$$+\left(\frac{2}{n\pi\sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{cotg.}\,\Theta - \Theta + \frac{\pi}{4}}{8n+4} \cdot \cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\Theta + \frac{\pi}{4}\right]$$

hinzu, welches in Z_n ein Glied

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{n\pi\sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{cotg.}\,\Theta - \Theta + \frac{\pi}{4}}{8n+4} \cdot \sin\left[(n+\tfrac{1}{2})\Theta + \frac{\pi}{4}\right]$$

hervorbringen würde. Dieses ist aber von der Ordnung derjenigen, welche in der Näherungsformel für X_n vernachlässigt sind, und auch hier vernachlässigt werden.

Digitized by Google

$$\cos\Theta + \tfrac{1}{3}\cos 3\Theta + \cdots = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}$$

ist,

$$\Sigma\frac{1}{\nu}\cos(\nu\Theta+\alpha) = -\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}\cdot\cos\alpha.$$

Substituirt man diesen Werth der Reihe in S, so wird

$$\tfrac{1}{2}X_n\log\frac{1+x}{1-x} - \tfrac{1}{2}Z_n = \left(\frac{2}{n\pi\sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}\cdot\cos\alpha - \frac{\pi}{4}\sin\alpha\right]$$

mithin

$$Z_n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{n\pi\sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left[(n+\tfrac{1}{2})\Theta \quad \frac{\pi}{4}\right]$$

Man sieht hieraus, dass Z_n zwischen den Grenzen $x = \pm 1$ von derselben schwankenden Natur ist, wie X_n. Für $x = 0$ wird $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\Theta = 1$, also

$$Z_n = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\sin.\frac{n\pi}{2}, \text{ oder: } Z_{2n} = 0, \text{ und } Z_{2n+1} = (-1)_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

was mit dem in n°2 gegebenen Werth von Z_{2n+1} für $x = 0$ übereinstimmt, indem nach der Formel von Wallis das Produkt $\frac{2.4.6....2n}{3.5.7...(2n+1)}$ für hohe Werthe von n den Werth $\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$ annimmt.

7.) Es wird nun nicht ohne Interesse seyn, zu untersuchen, welche Funktion die Grössen Z und Y erzeugt, sowie die Funktion $(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ die Polynome X erzeugt durch ihre Entwicklung nach Potenzen von r; mit andern Worten, die Summe der Reihe

$$Z_0 + Z_1 r + Z_2 r^2 + \cdots + Z_n r^n + \cdots$$

zu suchen.

Man kann zu derselben durch folgende Betrachtung gelangen. Aus der Relation VII und der Gleichung (4.) erhält man

$$x Z_n = X_n + \left(\frac{n-1}{1.n} + \frac{n-2}{3(n-1)}\right)X_{n-2} + \left(\frac{n-3}{3(n-1)} + \frac{n\ \ 4}{5(n-2)}\right)X_{n-4} + \cdots$$

und hieraus

$$(2n+1)x Z_n - (n+1)Z_{n+1} = n.\frac{2n-3}{n-1}X_{n-2} + n.\frac{2n-7}{3(n-2)}X_{n-4} + \cdots = n.Z_{n-1}$$

Folglich gilt für die Polynome Z (und mithin auch für die Integrale Y) dieselbe Relation, welche zwischen den X besteht, nämlich

$$n Z_{n-1} - (2n+1)x Z_n + (n+1)Z_{n+1} = 0 \qquad (8.$$

Digitized by Google

ausgenommen für $n = o$, da $Z_o = o$ und $Z_1 = 1$ ist, während diese Relation für X auch noch für $n = o$ giltig ist.

Mittelst dieser Relation (8.) suchen wir nun die Summe der Reihe

$$Z_o + Z_1 r + Z_2 r^2 + \ldots$$

indem wir den entgegengesetzten Gang befolgen von dem, welchen man einschlägt, um aus der entsprechenden Reihe von X die entsprechende Relation für X zu suchen.

Es folgt nämlich aus der Gleichung

$$(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} = X_o + X_1 r + X_2 r^2 + \cdots$$

durch Differentiation die Gleichung

$$(X_0 + X_1 r + X_2 r^2 + \cdots)(x - r) = (1 - 2rx + r^2)(X_1 + 2X_2 r + 3X_3 r^2 + \cdots)$$

und hieraus die Relation VII. Besteht umgekehrt diese Relation, so besteht auch diese Gleichung zwischen der Reihe und ihrem Differential. Da nun zwischen den Z die Relation (8. besteht, so besteht auch dieselbe Gleichung zwischen der Reihe und ihrem Differential, mit der Ausnahme jedoch, dass, während vorige Gleichung für den von r unabhängigen Theil $X_1 - xX_0 = o$ gibt, sie für die Reihe von Z geben muss $Z_1 - xZ_0 - 1 = o$ oder $Z_1 - 1 = o$, da $Z_0 = o$ ist. Es ist also in diesem Fall der linken Gleichungsseite noch das unabhängige Glied $+1$ beizufügen und man erhält somit, wenn man

$$Z_o + Z_1 r + Z_2 r^2 + \cdots = S$$

setzt, die Gleichung

$$1 + S(x - r) = (1 - 2rx + r^2)\frac{dS}{dr}$$

oder

$$\frac{dS}{dr} - \frac{x - r}{1 - 2rx + r^2} \cdot S = \frac{1}{1 - 2rx + r^2}$$

deren Integral ist

$$S = (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \int (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} dr$$

Da $S = o$ für $r = o$, so muss das Integral so genommen werden, dass es für $r = a$ verschwindet. Es ist also

$$\Sigma Z_n r^n = (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \int_o^r (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} dr \qquad (9.$$

Führt man die Integration aus, so erhält man

$$\Sigma Z_n r^n = (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \log \frac{1 + x}{x - r + \sqrt{1 - 2rx + r^2}} \qquad (9'.$$

Für $x = 1$ wird $Z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ und folglich

Digitized by Google

und folglich

$$\frac{1}{1-r}\log.\frac{1}{1-r} = r + (1+\frac{1}{2})r^2 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})r^3 + \ldots.$$

eine Reihe, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

Für $x = 0$ hingegen ist $Z_{2n} = 0$, $Z_{2n-1} = (-1)^n \frac{2.4..2n}{3.4..(2n+1)}$

und daher

$$\frac{\log.(r+\sqrt{1+r^2})}{\sqrt{1-r^2}} = r - \frac{2}{3}r^3 + \frac{2.4}{3.5}r^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}r^7 + - \ldots.$$

Es ist ferner

$$\Sigma\, \tfrac{1}{2} X_n \log\frac{1+x}{1-x}\cdot r^n = (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Bemerkt man nun, dass

$$\int_0^x (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr = \log.\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

ist, so erhält man mittelst der Gleichung (9.)

$$\Sigma\, Y_n r^n = \Sigma(\tfrac{1}{2} X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n) r_n$$

$$= (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_0^x (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr - \int_0^r (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr\right]$$

oder

$$\Sigma\, Y_n r^n = (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} \int_r^x (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr \qquad (10.$$

Hieraus geht hervor, dass der Werth der Summe $\Sigma\, Y_n r^n$ desto mehr abnimmt, oder der Werth der Reihe $\Sigma\, Z_n r^n$ sich desto mehr dem von $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\Sigma X_n r^n$ nähert, je mehr sich der Werth von r dem von x nähert. Natürlich ist hier r und $x < 1$ vorausgesetzt. Für $r = x$ wird $\Sigma\, Y_n x^n = 0$ oder $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\Sigma X_n x^n = \Sigma Z_n x^n$ eine identische Gleichung.

8. Ich habe mich in dem Vorhergehenden auf die Betrachtung der Integrale Y der Gleichung (1.)

$$\frac{d.(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx} + n(n+1)y = 0$$

beschränkt, wenn $x < 1$ ist.

Digitized by Google

Es lässt sich nun aber hieraus leicht das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung III.

$$\frac{\mathrm{d}.\sin\Theta\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\Theta}}{\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}\psi^2} + \mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)\,\mathrm{y} = 0$$

darstellen. Es ist diess die Gleichung, welcher die Polynome P_n (n^o 1) genügen, und allgemeiner ist, wenn $f(\Theta, \psi)$ eine willkürliche Funktion von Θ und ψ bezeichnet

$$y = \int\int f(\Theta', \psi')\, P_n \sin\Theta'\, d\Theta'\, dt'$$

ein Integral dieser Gleichung.

Ist y von ψ unabhängig, so geht die Gleichung III. in die Gleichung 1.) über, wenn in derselben cos Θ statt x gesetzt wird und es ist sodann

$$y = \tfrac{1}{2}\, X_n \log\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta} - Z_n$$

ein zweites partikuläres Integral dieser Gleichung. Setzen wir nun anstatt cos Θ den Ausdruck $\cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi-\psi')$, welcher gleich einem Cosinus gesetzt werden kann und mithin immer < 1 ist, so geht X_n über in P_n und wenn wir mit Z_n das bezeichnen, was Z_n unter derselben Voraussetzung wird, so wird $y = \frac{1}{2}\, P_n \log\frac{1+p}{1-p} - Z_n$, wenn man, wie in n^o 1, um abzukürzen, $\cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi-\psi') = p$ setzt. Es lässt sich nun zeigen, dass dieser Ausdruck y der Gleichung III. genügt.

Setzen wir zuerst $\frac{1}{2}\, P_n \log\frac{1+p}{1-p}$ an die Stelle von y so wird die erste Gleichungsseite nach einigen Reductionen

$$= \frac{2}{1-p^2}\cdot\frac{dP_n}{dp}\left[\left(\frac{dp}{d\Theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2\right] + \frac{P_n}{1-p^2}\times$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}.\sin\Theta\,\frac{dp}{d\Theta}}{\sin\Theta\,d\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\frac{d^2p}{d\psi^2} + 2p\right]$$

Der Coefficient von $\frac{P_n}{1-p^2}$ reducirt sich aber auf Null, weil $p = P$ ist, mithin der Gleichung III. für $n = 1$ genügt; der Coefficient von $\frac{1}{1-p^2}\cdot\frac{dP_n}{dp}$ aber ist $= 1 - P^2$ Es wird daher die erste Gleichungsseite von III., wenn man $\frac{1}{2}\, P_n \log\frac{1+p}{1-p}$ satt y setzt, $= 2\,\frac{dP_n}{dp}$.

Digitized by Google

Setzt man nun Z_n statt y, so reducirt sie sich auf ähnliche Weise auf

$$(1-p^2)\frac{d^2Z_n}{dp^2} - 2p\frac{dZ_n}{dp} + n(n+1)Z_n$$

Aus Gleichung 2.) ersieht man aber, dass dieser Ausdruck ebenfalls $= 2\cdot\frac{dP_n}{dp}$ ist. Es folgt hieraus, dass $y = \frac{1}{2}P_n \log\frac{1+p}{1-p} - Z_n$ die erste Seite der Gleichung III. $= o$ macht, also ein Integral dieser Gleichung ist.

Ist nun $F(\Theta, \psi)$ eine zweite willkürliche Funktion von Θ und ψ, so ist mithin auch

$$\int\int F(\Theta',\psi')\left[\tfrac{1}{2}P_n \log\frac{1+p}{1-p} - Z_n\right]\sin\Theta'\,d\Theta'\,d\psi'$$

ein Integral dieser Gleichung und ihr vollständiges Integral, welches zwei willkürliche Funktionen enthält, ist

$$\int\int f(\Theta',\psi')P_n\sin\Theta'\,d\Theta'\,d\psi' + \int\int F(\Theta',\psi')$$
$$\left[\tfrac{1}{2}P_n\log\frac{1+\cos\Theta\cos\Theta'+\sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi-\psi')}{1-\cos\Theta\cos\Theta'-\sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi-\psi')} - Z_n\right]\sin\Theta'\,d\Theta'\,d\psi' \quad X.$$

wo Z_n ein Polynom von $\cos\Theta'$, $\sin\Theta'\cos\psi'$ und $\sin\Theta'\sin\psi'$ vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist, gegeben durch die Gleichung (n° 4.)

$$Z_n = \frac{2n-1}{1.n}P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5} + \cdots \quad XI.$$

Nimmt man die Integrale in (X) von $\Theta'=o$ bis $\Theta'=\pi$ und von $\psi'=o$ bis $\psi'=2\pi$, so ist der erste Theil $= \frac{4\pi}{2n+1}Y_n$ wo Y_n das n^{te} Glied in der Entwicklung von $f(\Theta,\psi)$ ist (n° 1.) Das zweite partikuläre Integral in (X) lässt sich in diesem Falle durch eine Reihe solcher Polynome ersetzen. Es ist nämlich klar, dass die Gleichung 6.) (n° 4.) auch noch gültig bleibt, wenn man darin p statt x setzt. Hiedurch wird sie

$$\tfrac{1}{2}P_n\log\frac{1+\cos\Theta\cos\Theta'+\sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi-\psi')}{1-\cos\Theta\cos\Theta'-\sin\Theta\sin\Theta'\cos(\psi-\psi')} - Z_n =$$
$$\Sigma\frac{2m+1}{(m-n)(n+m+1)}P_m \quad XII.$$

Subsituirt man diese Reihe in den zweiten Theil von (X), so wird derselbe

$$\Sigma\frac{2m+1}{(m-n)(m+n+1)}\cdot\int_0^{\pi}d\Theta'\int_0^{2\pi}F(\Theta',\psi')P_m\sin\Theta'\,d\psi'$$

Setzt man

$$F(\Theta,\psi) = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots$$

Digitized by Google

wo die V ähnliche Polynome sind, wie die Y (n° 1), so nimmt das zweite partikuläre Integral der Gleichung III. folgende Form an

$$\Sigma \frac{4\pi}{(m-n)\,m+n+1)} V_m$$

oder da $\frac{1}{(m-n)\,(m+n+1)} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n+1}\right)$ ist

$$\frac{4\pi}{2n+1}\,\Sigma\left(\frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n+1}\right) V_m \qquad \text{XIII).}$$

wo sich die Summe Σ auf alle geraden Zahlen von $m=0$ bis $m=\infty$ erstreckt, wenn n ungerade, hingegen auf alle ungeraden, wenn n gerade ist.

9. Ich kehre nun zur Gleichung 1.) zurück. Die Kenntniss des vollständigen Integrals dieser Gleichung führt unmittelbar zur Summirung einer Classe hypergeometrischer Reihen, welche logarithmische und trigonometrische Funktionen als spezielle Fälle enthalten.

Integrirt man nämlich Gleichung 1.) durch unendliche Reihen, welche nur gerade Potenzen von x enthalten, wenn n ungerade, hingegen nur ungerade Potenzen von x, wenn n gerade, so müssen dieselben in dem Integral CY_n enthalten oder dem Y_n bis auf einen constanten Faktor gleich seyn.

Ist $x < 1$ und n ungerade, so erhält man

$$Y_n = A_n\left(1 - \frac{n\,(n+1)}{1.2}\,x^2 + \frac{(n-2)\,n\,.\,(n+1)\,(n+3)}{1.2.3.4}\,x^4 - + \ldots\right)$$

oder wenn man nach der gewöhnlichen Bezeichnung hypergeometrischer Reihen $1 + \frac{a.\,b.}{1.\,c}\,x + \frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{1.\,2\,c\,(c+1)}\,x^2 + \ldots = F\,(a, b, c, x)$ setzt

$$Y_n = \tfrac{1}{2}\,X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n = A_n\,F\,(-\tfrac{1}{2}\,n, \tfrac{1}{2}\,(n+1), \tfrac{1}{2}, x^2) \quad (11.$$

Der Coefficient A_n ist hier offenbar $= -Z_n$ für $x=0$, folglich (n° 2.)

$$A_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\,.\,\frac{2.4\ldots(n-1)}{3.5\ldots\quad n}\,.$$

Ist $x<1$ und n gerade, so findet man

$$Y_n = A_n\left(x - \frac{(n-1)\,(n+2)}{2.3}\,x^3 + \frac{(n-3)(n-1).(n+2)(n+4)}{2.3.4.5}\,x^5 - + \ldots\right)$$

oder

$$Y_n = \tfrac{1}{2}\,X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n = A_n\,x.F\,(-\tfrac{1}{2}\,(n-1), \tfrac{1}{2}\,(n+2), \tfrac{3}{2}, x^2) \quad (12.$$

der Faktor A_n hat hier den Werth von $X_n - \frac{Z_n}{x}$ für $x=0$.

Digitized by Google

Der Werth von X_n für $x=o$ findet sich aus n°. 1. $= (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3...(n-1)}{2.4..n}$; um aber den von $\frac{Z_n}{x}$ ohne Mühe zu finden, müssen wir auf die Herleitung von Z in n°. 2 zurückgehen. Es war daselbst $Z_n = -\Sigma \frac{B_1 X_n}{\alpha^2 - x^2} \cdot x$, die Summe Σ auf alle positiven Wurzeln von $X_n = o$ ausgedehnt. Hieraus folgt für $x=o$, $\frac{Z_n}{x} = -X_n \Sigma \frac{B_1}{\alpha^2}$. Nun fanden wir aber ebendaselbst $\frac{Q}{X_n^2} = \Sigma B_1 \cdot \frac{x^2 + \alpha^2}{(x^2 - \alpha^2)^2}$; mithin ist für $x=o$, $\frac{Q}{X_n^2} = \Sigma \frac{B_1}{\alpha^2}$ oder da $Q = \frac{X_n^2 - 1}{x^2 - 1}$ ist

$$\Sigma \frac{B_1}{\alpha^2} = \left(\frac{1 - X_n^2}{X_n^2}\right)_{x=o} \qquad (1.$$

Hieraus folgt nun für $x = o$

$$\frac{Z_n}{x} = -\frac{1 - X_n^2}{X_n} \text{ und } X_n - \frac{Z_n}{x} = \frac{1}{X_n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2.4...n}{1.3....(n-1)}.$$

Es ist also in diesem Falle

$$A_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2.4...n}{1.3...(n-1)}.$$

10. Ist $x > 1$, so ist, wie ich schon Anfangs bemerkte

$$Y_n = \tfrac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n$$

und es lässt sich die Reihe aus diesem Integral selbst entwickeln.

Setzt man, wie früher, $X_n = a_0^{(n)} x^n + a_2^{(n)} x^{n-2} + a_4^{(n)} x^{n-4} + \cdots$ und für $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$ die Reihe $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \cdots$, so erhält man in der Entwicklung von $\frac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1}$ folgende Glieder mit positiven Potenzen von x

$$\left.\begin{matrix} a_0^{(n)} x^{n-1} + \frac{1}{3} a_0^{(n)} \\ + \quad a_2 \end{matrix}\right\} x^{n-3} + \cdots.$$

Nach Gleichung (7.) ist aber diese Summe gerade unser Z_n und es verschwinden mithin diese Glieder aus der Entwicklung von Y_n. Ferner erhält man für die negativen Potenzen von x

$$\cdots + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2n-5} a_0^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-7} a_2^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-9} a_4^{(n)} \\ \vdots \end{matrix}\right\} \frac{1}{x^{n-5}} + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2n-3} a_0^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-5} a_2^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-7} a_4^{(n)} \\ \vdots \end{matrix}\right\} \frac{1}{x^{n-3}} + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2n-1} a_0^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-3} a_2^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-5} a_4^{(n)} \\ \vdots \end{matrix}\right\} \frac{1}{x^{n-1}} + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2n+1} a_0^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-1} a_2^{(n)} \\ + \frac{1}{2n-3} a_4^{(n)} \\ \vdots \end{matrix}\right\} \frac{1}{x^{n+1}} + \cdots$$

Digitized by Google

Nun sind aber die Coefficienten von $\frac{1}{x^{n-1}}$, $\frac{1}{x^{n-3}}$, $\frac{1}{x^{n-5}}$ u. s. w. nichts anderes als $\int x^{n-2} X_n dx$, $\int x^{n-4} X_n dx$, $\int x^{n-6} X_n dx$, u. s. f. für $x=1$, und da alle diese Integrale nur ungerade Potenzen von x enthalten und vermöge der Eigenschaft (VIII.) von X_n Null werden, wenn man sie von $x=+1$ bis $x=-1$ nimmt, so müssen sie auch Null werden für $x=1$. Unsere Reihe enthält also nur die Potenzen von x von $\frac{1}{x^{n+1}}$ abwärts und die Coefficienten der Reihe sind die Werthe der Integrale $\int x^n X_n dx$, $\int x^{n+2} X_n dx$, u. s. f. für $x=1$. Man kann sie finden, indem man die Potenzen von x in Reihen von X verwandelt, oder auch unmittelbar aus der Differentialgleichung bestimmen.

Man erhält sodann

$$Y_n = \frac{A_n}{x^{n+1}}\left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{1}{x^4} \cdots\right)$$

oder

$$Y_n = \tfrac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n = \frac{A_n}{x^{n+1}} F\left(\tfrac{1}{2}(n+1), \tfrac{1}{2}(n+2), \tfrac{1}{2}(2n+3), \frac{1}{x^2}\right) \quad (13.$$

Der Coefficient A_n ist $= \int_0^1 x^n X_n dx$ und dieses Integral ist leicht zu finden. Denkt man sich nämlich x^n nach X entwickelt, so dass $x^n = AX_n + BX_{n-1} + \cdots$ so ist $\int_{-1}^{+1} x^n X_n dx = A \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1} A$. Nun muss aber offenbar der Coefficient von x^n in AX_n gleich 1 seyn, folglich, da $X_n = \frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{1.2.3..n} x^n + \ldots$ ist, $A = \frac{1.2.3 \ldots n}{1.2.5.(2n-1)}$. Da nun $\int_0^1 x^n X_n dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^n X_n dx = \frac{1}{2n+1} A$ ist, so wird

$$A_n = \frac{1.2.3 \ldots n}{1.3.5 \ldots (2n+1)} \quad (13!$$

für gerade sowohl als ungerade n.

11. Allgemeinere Reihen als die vorhergehenden erhält man aus der Gleichung IV., deren Integration sich auf die der Gleichung 1.) zurückführen lässt.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{d.(1-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} z$ statt y, so geht sie in folgende über

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} + 2(m-1)x \cdot \frac{dz}{dx} + (n-m+1)(n+m) z = 0 \quad (14.$$

Digitized by Google

Differenzirt man diese Gleichung, so erhält man eine Gleichung derselben Form, nur steht $\frac{dz}{dx}$ an der Stelle von z und $m-2$ statt m. Da also bei jeder Differentiation m sich um zwei Einheiten vermindert, so erhält man, wenn man $m-1$ mal differenzirt

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + n(n+1)\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = 0$$

und durch nochmalige Differentiation

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}} - 2x\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + n(n+1)\frac{d^mz}{dx^m} = 0$$

Diese Gleichung hat aber in Bezug auf $\frac{d^mz}{dx^m}$ ganz dieselbe Form wie Gleichung 1.) und es ist mithin ihr vollständiges Integral in Bezug auf $\frac{d^mz}{dx^m}$

$$\frac{d^mz}{dx^m} = C.Y_n + C'.X_n$$

wo C und C' beliebige Constante sind. Hieraus folgt

$$Z = C\int^m Y_n\,dx + C'\int^m X_n\,dx \qquad (15.$$

Diese m fachen Integrale lassen sich aber durch Differentialquotienten von Y und X ausdrücken.

Die Gleichung 1.) gibt durch $(m-1)$ malige Differentiation (n° 3.)

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} - 2mx\cdot\frac{d^my}{dx^m} + (n+m)(n-m+1)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1-x^2)^{m-1}$, so lässt sie sich auf folgende Art schreiben

$$\frac{d.(1-x^2)^m\frac{d^my}{dx^m}}{dx} = -(n+m)(n-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^2.(1-x^2)^m\frac{d^my}{dx^m}}{dx^2} = -(n+m)(n-m+1)\cdot\frac{d.(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}}{dx}$$

$$= +(n+m)(n+m-1)\cdot(n-m+1)(n-m+2)(1-x^2)^{m-2}\cdot\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$$

Digitized by Google

und wenn man m mal differenzirt

$$\frac{d^m\,(1-x^2)^m\,\dfrac{d^m y}{dx^m}}{dx^m} = (-1)^m\,(n+m)\,\ldots\ldots\,(n-m+1)\,.\,y \qquad (16.$$

oder

$$\int^m y\,dx = \frac{(-1)^m}{(n+m)\,\ldots\,(n-m+1)}\,.\,(1-x^2)^m\,\frac{d^m y}{dx^m} \qquad (16'.$$

Setzt man in 16.) für y das partikuläre Integral X_n und m=n, so wird, da $\frac{d^n X_n}{dx^n} = 1.3.5\ldots(2n-1)$ ist,

$$X_n = \frac{1}{2.4.6..2n}\,.\,\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n}$$

Jacobi und Ivory*) gaben diesen Ausdruck für X_n mittelst der Lagrangeschen Reihe. Setzt man ihn statt y in die Gleichung (16!) so erhält man den von Jacobi gegebenen Satz**) über die Differentialquotienten von $(x^2-1)^n$. Vorliegender Beweis stützt sich allein auf die Differentialgleichung und hat daher den Vortheil zu zeigen, dass die Gleichung (16.) nicht nur eine Eigenschaft der X_n sondern auch des andern partikulären Integrals Y_n enthält. Nur sind die Constanten der Integration in (16') für X und Y verschieden zu bestimmen. Denn während für $y=X_n$ alle Integrale in (16') Null werden müssen für $x=\pm 1$, enthält für $y=Y_n$ die rechte Seite das von dem Faktor $(1-x^2)$ freie Glied

$$(1-x^2)^m\,X_n\,\frac{d^m \log\frac{1+x}{1-x}}{dx^m}$$

und die Constanten der Integration sind demgemäss zu bestimmen.

Mittelst Gleichung 16'.) lässt sich nun das Integral der Gleichung 14.) auf folgende Art schreiben

$$z = (1-x^2)^m\left[C.\frac{d^m Y_n}{dx^m} + C'.\frac{d^m X_n}{dx^m}\right] \qquad (17.$$

und das von Gleichung IV.

$$y = (-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[C.\frac{d^m Y_n}{dx^m} + C'.\frac{d^m X_n}{dx^m}\right]$$

Das zweite partikuläre Integral in der letzten Gleichung ist das Polynom, welches nach der gewöhnlichen Bezeichnung in n° 1. $P_{n,m}$ genannt wurde.

*) Philosophical Transactions. 1834. Part II.

**) Crelle, Journ. f. Math. Bd. II.

Digitized by Google

12. Integrirt man die Gleichung 14.) auf die bekannte Weise durch unendliche Reihen, so müssen dieselben dem Integral $(1-x^2)^m \frac{d^m Y_n}{dx^m}$ entsprechen. Behalten wir die frühere Bezeichnung hypergeometrischer Reihen bei, so wird, wenn $x < 1$ und $n+m$ ungerade ist,

$$(1-x^2)^m \frac{d^m Y_n}{dx^m} = A.\ F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m),\ \tfrac{1}{2}(n-m+1),\ \tfrac{1}{2},\ x^2\right) \qquad (18.$$

wenn $x<1$ und $n+m$ gerade ist,

$$(1-x^2)^m \frac{d^m Y_n}{dx^m} = A\,x.F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m-1),\ \tfrac{1}{2}(n-m+2),\ \tfrac{3}{2},\ x^2\right) \qquad (19.$$

Um die Coefficienten A in diesen Gleichungen zu bestimmen, bemerke ich, dass der Faktor $(1-x^2)^m$ darauf keinen Einfluss übt; sie müssen daher gleich seyn den Coefficienten von x^0 und x^1 in dem m^{ten} Differential der Reihen, welche wir in n° 9 für Y_n erhalten haben.

Hieraus ergeben sich folgende Fälle:

Wenn n ungerade und m gerade,

$$A = (-1)^{\frac{n+m+1}{2}} \cdot \frac{2.4\ldots(n+m-1)}{1.3\ldots(n-m)}$$

Wenn n ungerade und m ungerade

$$A = (-1)^{\frac{n+m+2}{2}} \cdot \frac{2.4\ldots.(n+m)}{1.3\ldots(n-m-1)}$$

Wenn n gerade und m gerade

$$A = (-1)^{\frac{n+m}{2}} \cdot \frac{2.4\ldots(n+m)}{1.3\ldots(n-m-1)}$$

Wenn n gerade und m ungerade

$$A = (-1)^{\frac{n+m-1}{2}} \cdot \frac{2.4\ldots(n+m-1)}{1.3..(n-m)}$$

In allen Fällen, in welchen der Zähler oder Nenner von A nach diesen Formeln 0 oder -1 würde, wie z. B. für $n=m$ oder $n=0$, ist für diesen Zähler oder Nenner 1 zu nehmen.

Ist $x>1$, so beginnt die Reihe für Y_n, wie wir in n° 10 sahen mit $\frac{1}{x^{n+1}}$.

Da nun nach 15.) $z = C \int^m Y_n\,dx$ ist, so folgt, dass die Reihe für z mit $\frac{1}{x^{n-m+1}}$ beginnen müsse.

Digitized by Google

Setzt man daher

$$z = \frac{A}{x^{n-m+1}} + \frac{B}{x^{n-m+3}} + \frac{C}{x^{n-m+5}} + \cdots$$

so wird

$$B = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2.(2n+3)} A,\ C = \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n-m+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} A$$

u. s. f.

mithin

$$(1-x^2)^m \frac{d^m Y_n}{dx^m} = \frac{A}{x^{n-m+1}} F\left(\tfrac{1}{2}(n-m+1), \tfrac{1}{2}(n-m+2), \tfrac{1}{2}(2n+3), \frac{1}{x^2}\right) \text{(20.}$$

wo

$$Y_n = \tfrac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n$$

zu setzen ist.

Um den Faktor A zu bestimmen, differenzire man m mal, so erhält man

$$\frac{d^m\left((1-x^2)^m \frac{d^m Y_n}{dx^m}\right)}{dx^m} = (-1)^m (n-m+1)(n-m+2)\cdots n \cdot \frac{A}{x^{n+1}}(1+\cdots)$$

also vermöge Gleichung 16.)

$$Y_n = \frac{A}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} (1+\cdots)$$

Diese Entwicklung von Y_n muss aber dieselbe seyn welche wir in n° 10 fanden. Es ist also

$$\frac{A}{(n+1)\,n+2)\cdots(n+m)} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5..(2n+1)}$$

und

$$A = \frac{1.2.3.4\ldots(n+m)}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$

für gerade und ungerade Werthe von n und m.

Ist $n=m=o$, so ist $A=1$ zu setzen.

Für $m=o$ gehen die Gleichungen 18.) 19.) 20.) in die Gleichungen 11.) 12.) 13.) über. Die Gleichung 20.) enthält die Reihe, welche Heine in der n° 1 erwähnten Abhandlung benützte. Sie ist hier summirt für ganze positive Werthe von m, welche = oder $< n$ sind. Denn nur für solche gilt die Gleichung 16'). Ich werde aber an einem andern Orte zeigen, wie sich die Summe dieser Reihe immer durch logarithmische oder algebraische Funktionen darstellen lässt, es mag m eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl seyn.

Digitized by Google

13. Es wird hier passend sein, eine Bemerkung einzuschalten über die Art und Weise, wie die vorhergehenden Gleichungen abzuändern sind, wenn x die imaginäre Form $x\sqrt{-1}$ annimmt.

Da das Integral einer Differentialgleichung dieselbe identisch macht, so ist es klar, dass das Integral der Gleichung 1.), welches wir in n° 2. gefunden haben, auch noch das Integral dieser Gleichung seyn muss, wenn x in $x\sqrt{-1}$ übergeht. Es verwandelt sich aber in diesem Falle $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ in $(\text{arc.tg.}x \pm K\pi)\sqrt{-1}$ und $\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ in $(\text{arc.tg.}x \pm (K+\frac{1}{2})\pi)\sqrt{-1}$, wo K irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da aber das allgemeine Integral der Gleichung 1.) die Form $C\left(\frac{1}{2}X_n\log\frac{1+x}{1-x} - Z_n\right) + C'X_n$ hat, so sieht man, dass die Constanten $K\pi\sqrt{-1}$ oder $(K+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$ mit X_n multiplicirt aus dem partikulären Integral CY_n weggelassen und mit dem andern $C'X_n$ verbunden werden können.

Bezeichnen wir ferner mit X'_n und $Z'_n\sqrt{-1}$ das, was X_n und Z_n werden, wenn man darin $x\sqrt{-1}$ statt x setzt, für gerade n, und mit $X'_n\sqrt{-1}$ und Z'_n die Werthe von X_n und Z_n in demselben Falle, wenn n ungerade ist, so sind X'_n und Z'_n reelle Grössen. Es wird sodann wenn n gerade, $Y_n = (+X'_n\,\text{arc.tg.}x - Z'_n)\sqrt{-1}$, und wenn n ungerade, $Y_n = -X'_n\,\text{arc.tg.}x - Z'_n$; mithin das vollständige Integral der Gleichung 1.), wenn darin $x\sqrt{-1}$ statt x gesetzt wird, sowohl für $x>1$ als $x<1$,

$$y = CY'_n + C'X'_n$$

wo Y'_n folgende reelle Grösse bezeichnet

$$Y'_n = \pm X'_n\,\text{arc.tg.}x - Z'_n$$

Das obere Zeichen gilt, wenn n gerade, das untere wenn n ungerade ist.

Alle diejenigen Gleichungen nun, welche sich unmittelbar aus der Differentialgleichung ergeben, werden auch für imaginäre Werthe von x gültig bleiben. Zu diesen gehört die Gleichung 16.), welche in diesem Fall gibt

$$y = \frac{1}{(n-m+1)(n-m+2)\cdots(n+m)}\cdot\frac{d^m.(1+x^2)^m\frac{d^my}{dx^m}}{dx^m}$$

für $y=X'_n$ oder $y=Y'_n$.

Das Integral der Gleichung 14.) wird nun

$$z = C\int^m Y'_n\,dx + C'\int^m X'_n\,dx$$

Digitized by Google

und kann, vermöge der vorigen Gleichung in die der Gleichung 17.) analoge Form

$$z = (1+x^2)^m \left[C. \frac{d^m Y'_n}{dx^m} + C'. \frac{d^m X'_n}{dx^m}\right]$$

umgewandelt werden. Es behalten mithin auch die Gleichungen 18.) 19.) 20.), in welchen Reihen summirt sind, ihre Gültigkeit, wenn man $x\sqrt{-1}$ satt x setzt. Jedoch ist in diesem Falle näher zu bestimmen, wie der Bogen arc. tg. x zu nehmen ist, indem die Constanten $K\pi\sqrt{-1}$ und $(K+\frac{1}{2})\,\pi\sqrt{-1}$ hier nicht in einer willkürlichen Constante aufgehen.

Um zu sehen, welche Werthe hier für die Logarithmen zu setzen sind, müssen wir auf das Integral $\int\frac{dx}{1-x^2}$ zurückgehen, aus welchem sie entstanden. Wir nahmen, für $x<1$, $\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$; für $x>1$, $\int\frac{dx}{1-x^2} = \int\frac{d.\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}\log.\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

Im ersten Fall verschwindet das Integral für $x=0$, im zweiten für $x=\infty$. Geht x in $x\sqrt{-1}$ über, so ist daher auf gleiche Weise für $x<1$ $\int\frac{dx}{1+x^2}\cdot\sqrt{-1}$ $=$ (arc. tg. x.) $\sqrt{-1}$ ohne Beifügung einer Constanten zu setzen; hingegen wenn $x>1$, $\int\frac{dx}{1+x^2}\sqrt{-1} = -\int\frac{d.\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\sqrt{-1} =$ (— arc. tg. $\frac{1}{x}$) $\sqrt{-1}$ od. $=$ (arc. tg. x $-\frac{\pi}{2}$) $\sqrt{-1}$ zu nehmen. Der Bogen fällt also immer zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$.

Demnach erhält man aus den Gleichungen 18.) 19.) 20.) die Summe folgender Reihen:

Wenn $x<1$ und $n+m$ ungerade:

$$(1+x^2)^m \frac{d^m}{dx^m}\left[\pm X'_n \text{ arc. tg. } x - Z'_n\right] = A'.F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m), \tfrac{1}{2}(n-m+1), \tfrac{1}{2}, -x^2\right) \quad (21.$$

Wenn $x<1$ und $n+m$ gerade:

$$(1+x^2)^m \frac{d^m}{dx^m}\left[\pm X'_n \text{ arc. tg. } x - Z'_n\right] = A'.x.F\left(-\tfrac{1}{2}(n+m-1), \tfrac{1}{2}(n-m+2), \tfrac{3}{2}, -x^2\right) \quad (22.$$

wo das obere Zeichen von X'_n arc. tg. x zu nehmen ist, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade. Die Coefficienten A' haben dieselben numerischen Werthe wie die Coefficienten A in 18.) und 19.), nur die Zeichen sind verschieden. Es wird nämlich wenn n ungerade und m gerade

$$A' = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2.4\ldots(n+m-1)}{1.3\ldots(n-m)}$$

Digitized by Google

Wenn n ungerade und m ungerade

$$A' = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2.4\ldots(n+m)}{1.3\ldots(n-m-1)}$$

Wenn n gerade und m ungerade

$$A' = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2.4\ldots.(n+m-1)}{1.3\ldots.(n-m)}$$

Wenn n gerade und m gerade

$$A' = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2.4\ldots(n+m)}{1.3\ldots(n-m-1)}.$$

Ist $x>1$, so wird

$$(1+x^2)^m \frac{d^m}{dx^m}\left[\pm X'_n \text{arc. tg.}\frac{1}{x} - Z'_n\right] = \frac{A'}{x^{n-m+1}} F\left(\tfrac{1}{2}(n-m+1),\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{2}(n-m+2), \tfrac{1}{2}(2n+3), -\tfrac{1}{x^2}\right) \qquad (23.$$

wo wieder das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist

$$A' = (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \cdot \frac{1.2.3.4\ldots(n+m)}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

im zweiten

$$A' = (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \cdot \frac{1.2.3.4\ldots.(n+m)}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Bemerken wir noch, dass für $n=m=0$ die Reihen in 18.) bis 23.) in die bekannten Reihen für $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ und arc. tg. x übergehen, indem $X_0 = X'_0 = 1$, $Z_0 = Z'_0 = 0$ ist.

14. Ist $x>1$, so verlieren die X und Z ihre Eigenschaft, zwischen bestimmten Grenzen hin und her zu schwanken. Sie bleiben dann, wie man sich leicht überzeugt, für positive x immer positiv und wachsen mit n in das Unendliche. Das Integral Y, welches für verschiedene Werthe von x oder n auch bald positiv, bald negativ wird, so lange $x<1$ ist, verändert ebenfalls seine Natur, wenn $x>1$ wird. Man ersieht nämlich aus der Reihe 13.), dass es in diesem Falle für positiv x immer positiv ist und rasch abnimmt, wenn x wächst.

Es ergibt sich aber auch aus derselben Reihe, dass Y_n um so kleiner wird, je grösser n ist. Denn setzt man daselbst für den Coefficienten A_n seinen Werth, so sieht man, dass, wenn n um die Einheit wächst, nicht nur die ganze Reihe einen Faktor $\frac{1}{x}$ mehr erhält, sondern auch die Coefficienten der einzelnen Glieder der Reihe um einen Faktor vermehrt werden, der <1 ist. Die Reihe $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ nimmt also schneller ab, als die Reihe $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}\ldots$

Digitized by Google

Das Abnehmen von Y, wenn n wächst, lässt sich auch aus Folgendem ermessen. Aus den Relationen VII. und 8.) folgt

$$Z_{n+1} X_n - Z_n X_{n+1} = \frac{n}{n+1} (Z_n X_{n-1} - Z_{n-1} X_n),$$

mithin

$$Z_{n+1} X_n - Z_n X_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n+1}$$

und

$$\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}} - \frac{Z_n}{X_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{X_n X_{n+1}}$$

Setzt man hierin für n allmälig $n+1, n+2, \ldots \infty$ und addirt alle so erhaltenen Gleichungen, so folgt, da Y_n sich immer mehr dem Werthe o, mithin $\frac{Z_n}{X_n}$ sich immer mehr dem Werthe von $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$ nähert, wenn n wächst,

$$\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x+1} - \frac{Z_n}{X_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{X_n X_{n+1}} + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{X_{n+1} X_{n+2}} + \ldots$$

So oft also n um 1 grösser wird, verschwindet immer das erste Glied der Reihe. Multiplicirt man die Gleichung mit X_n, so erhält man eine Reihe für Y_n, aus welcher leicht zu ersehen ist, wie diese Grösse abnimmt wenn n wächst.

Aus dem Abnehmen von Y oder von $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{Z_n}{X_n}$ für steigende Werthe von n und aus dem Umstande, dass zwischen den Z und den X dieselbe Relation (VII. und 8.) besteht, lässt sich sogleich schliessen, dass Z_n und X_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungswerthes eines Kettenbruchs seyn müssen, dessen wahrer Werth $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$ ist.

Ist nämlich der Kettenbruch

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}$$

gegeben, und nennen wir $\frac{P_n}{Q_n}$ seinen n^{ten} Näherungsbruch, so bestehen zwischen

Digitized by Google

den P und Q die Relationen

$$P_{n+1} = a_{n+1} P_{n-1} + b_{n+1} P_n, \quad Q_{n+1} = a_{n+1} Q_{n-1} + b_{n+1} Q_n \qquad (\alpha.$$

ausgenommen für $n = o$, in welchem Falle man hat

$$P_1 = a_1 + b_1 P_0, \quad Q_1 = b_1 Q_0; \quad P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1 \qquad (\beta.$$

Vergleicht man die Relationen (α.) mit den Relationen (VII.) und (8.), so sieht man, dass $a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, $b_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot x$ wird, wenn P_n in Z_n und Q_n in X_n übergeht. Ferner wird $P_1 = Z_1 = 1$, $Q_1 = X_1 = x$, $P_0 = Z_0 = o$, $Q_0 = X_0 = 1$, mithin $a_1 = 1$, $b_1 = x$.

Es ist also Z_n und X_n der Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungswerthes des Kettenbruchs

$$\frac{0}{1} + \cfrac{1}{x - \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}x - \cfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}x - \cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}x - \cdots}}}} \qquad (24.$$

und der Werth des ganzen Kettenbruchs, ins Unendliche fortgesetzt, ist, für $x > 1$, $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn man die Werthe von Z und X aus dem Kettenbruch darstellen will, man die Näherungsbrüche nicht reduciren darf.

Da alle Zähler des Kettenbruches, den ersten ausgenommen, negativ sind, so ist der Näherungsbruch $\frac{Z_n}{X_n}$ immer $< \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$, und da X immer positiv ist für positive Werthe von $x > 1$, so muss $Y_n = X_n (\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{Z_n}{X_n})$ immer positiv seyn für solche Werthe von x, wie wir schon aus der Reihenentwicklung (13.) ersahen.

Nun erhalten die in den n°. 2 betrachteten Integrale erst ihre eigentliche Bedeutung. Man ersieht nämlich, dass das Integral

$$-\int \frac{1-X_n^2}{1-x^2} \cdot \frac{dx}{X_n^2}$$

den n^{ten} Näherungswerth obigen Kettenbruchs (24.) darstellt, während das Integral

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\, X_n^2}$$

Digitized by Google

die Differenz dieses Näherungswerthes vom wahren Werthe des Kettenbruchs $\int \frac{dx}{1-x^2}$ bezeichnet, vorausgesetzt, dass $x > 1$ ist.

Setzt man in dem Kettenbruch $x\sqrt{-1}$ statt x, so wird nach n° 13

$$\left(\text{arctg. } x - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1} \text{ statt } \tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

zu setzen seyn, und man erhält nach Wegschaffung des Faktors $\sqrt{-1}$,

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc. tg } x = \cfrac{1}{x+\cfrac{1^2}{3x+\cfrac{2^2}{5x+\cfrac{3^2}{7x+\cdots}}}} \qquad (25.$$

Der Kettenbruch (24.) hat, wie man leicht zeigen kann, nur für $x > 1$ einen angebbaren Werth, während letzterer Kettenbruch auch für $x < 1$ convergent bleibt. Die Gleichung (25.) wird mithin auch für $x \gtrless 1$ bestehen. In der That gibt sie, wenn $x = 1$ gesetzt wird, einen bekannten Kettenbruch für $\frac{\pi}{4}$; und wenn $x = 0$ gesetzt wird, die bekannte Formel von Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6\ldots}{1.3.3.5.5\ldots}$$

15. Aus der Herleitung der Reihe (13.) in n° 10 ergibt sich eine wegen ihrer Einfachheit bemerkenswerthe Form von Y_n als bestimmtes Integral. Es zeigte sich nämlich, dass die Coefficienten von $\frac{1}{x^{n+1}}, \frac{1}{x^{n+3}}, \ldots$ in dieser Reihe durch die Integrale

$$\int_0^1 x^n X_n\, dx, \quad \int_0^1 x^{n+2} X_n\, dx, \ldots$$

dargestellt werden können. Setzen wir statt dieser Integrale die gleichgeltenden

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^n X_n\, dx, \quad \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^{n+2} X_n\, dx \ldots$$

und bemerken wir, dass die ähnlichen Integrale mit niedrigern Potenzen von x sämmtlich $= 0$ sind und ebenso auch die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} x^{n+1} X_n\, dx, \quad \int_{-1}^{+1} x^{n+3} X_n\, dx, \ldots,$$

Digitized by Google

so erhalten wir

$$Y_n = \Sigma \frac{1}{x^{n+m}} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} X_n \, x^{n+m-1} \, dx \right)$$

wo sich die Summe Σ von $m = 1$ bis $m = \infty$ erstreckt. Schreiben wir unter dem Integralzeichen a statt x und A_n statt X_n und führen die Summation aus, so wird

$$Y_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{A_n}{x - a} \, da . \qquad (26.$$

wenn $x > 1$ ist.

Dieses Integral lässt sich noch unter eine andere Form bringen. Setzt man für A_n den Ausdruck $\frac{1}{2^n . 1.2.3..n} \cdot \frac{d^n (a^2 - 1)^n}{da^n}$ (n° 11) und integrirt n^{mal} partiell, so erhält man

$$Y_n = \frac{(-1)^n}{2^n . 1.2.3..n} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n \left(\frac{1}{x-a} \right)}{da^n} (a^2 - 1)^n \, da$$

oder, da $\frac{d^n \left(\frac{1}{x-a} \right)}{da^n} = 1.2.3 \ldots n . \frac{1}{(x-a)^{n+1}}$ ist,

$$Y_n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - a^2)^n}{(x-a)^{n+1}} \, da \qquad (27.$$

Aus (26.) und (27.) ergibt sich sogleich auch $\frac{d^m Y_n}{dx^m}$ als bestimmtes Integral.

Vergleicht man den Ausdruck für Y_n in 26.) mit dem der Coefficienten in der Reihe V. (n°. 1), sieht man, dass $(2n+1) Y_n$ der Coefficient von A_n in der Entwicklung von $\frac{1}{x - a}$ nach Polynomen A ist. Es ist daher für $x > 1$ und $a \lessgtr 1$

$$\frac{1}{x - a} = A_0 Y_0 + 3 \cdot A_1 Y_1 + 5 A_2 Y_2 + \cdots \qquad (28.$$

Für $a = \pm 1$ wird

$$\frac{1}{x \mp 1} = Y_0 \pm 3 Y_1 + 5 Y_2 \pm 7 Y_3 + \cdots$$

Digitized by Google

und für $a = o$

$$\frac{1}{x} = Y_0 - 5.\,\tfrac{1}{2}\,Y_2 + 9.\,\frac{1.3}{2.4}\,Y_4 - + \cdots$$

Man bemerke, dass die hier in Reihen nach Y entwickelten Funktionen zu denjenigen gehören, welche in dem n° 1 erwähnten Ausnahmefall begriffen sind und nicht nach Polynomen X (V.) entwickelt werden können.

Aus Gleichung (26 folgt zugleich auch folgender allgemeinere Satz:

Wenn $f(x)$ in eine Reihe der Form

$$A_0\,X_0 + A_1\,X_1 + A_2\,X_2 + \cdots$$

für $x < 1$ entwickelt werden kann, so ist für $x > 1$ die Summe der Reihe

$$A_0\,Y_0 + A_1\,Y_1 + A_2\,Y_2 + \cdots$$

durch das Integral $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{f(a)}{x-a}\,da$ gegeben.

Die Reihen nach Polynomen X sowohl als nach Y haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass man unmittelbar ihr Integral in Form eben solcher Reihen angeben kann. Ich werde bei einer andern Gelegenheit darauf zurückkommen.

Digitized by Google

Note I.

Von der Formel

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n \log\frac{1+x}{1-x}\right].$$

Das Polynom X_n kann unter die Form (n° 11.)

$$X_n = A\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

gebracht werden. Durch einen ähnlichen eleganten Ausdruck lässt sich auch die Grösse $X_n \log.\frac{1+x}{1-x} - Z_n$ darstellen.

Suchen wir zuerst das vollständige Integral der Gleichung (2.)

$$\frac{d.(1-x^2)\frac{dz}{dx}}{dx} + n(n+1)\,z = 2\frac{dX_n}{dx} \qquad (\alpha.$$

Wir wissen, dass $z = Z_n$ ein Integral dieser Gleichung ist, und dass $\frac{1}{2}X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n$ statt z gesetzt, die erste Gleichungsseite $= o$ macht. Hieraus folgt, dass auch $z = \frac{1}{2}X_n \log\frac{1+x}{1-x}$ ein Integral seyn muss. Setzt man also $z = CX_n \log\frac{1+x}{1-x}$, wo C eine beliebige Constante ist, so wird die erste Seite der Gleichung $= 4C\cdot\frac{dX_n}{dx}$; setzt man hingegen $z = C'Z_n$, wo C' ebenfalls eine Constante ist, so wird sie $= 2C'\frac{dX_n}{dx}$. Setzt man also $z = CX_n \log\frac{1+x}{1-x} - C'Z_n$,

Digitized by Google

so wird der Gleichung (α.) genügt, wenn $4C - 2C' = 2$ oder $C' = 2C - 1$ ist. Ferner sieht man ein, dass man diesem Integral noch ein Glied $C'' X_n$, wo C'' eine beliebige Constante ist, beifügen kann, weil hiedurch der Werth der er ten Gleichungsseite nicht geändert wird. Es ist somit das vollständige Integral der Gleichung (α.

$$z = C X_n \log \frac{1+x}{1-x} - (2C - 1) Z_n + C'' X_n \qquad (\beta.$$

Substituiren wir nun in Gleichung (α.) für X_n den Ausdruck $A \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$ und integriren wir hierauf $n + 1$ mal, so erhalten wir

$$\int^n (1-x^2) \frac{dz}{dx} dx + n(n+1) \int^{n+1} z\, dx = 2A (x^2 - 1)^n$$

Nun ist nach der Formel

$$\int^n v w\, dx = v \int^n w\, dx - \frac{n}{1} \cdot \frac{dv}{dx} \int^{n+1} w\, dx + \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \int^{n+2} w\, dx - \ldots .$$

das erste Glied $\int^n (1 - x^2) \frac{dz}{dx} dx$ gleich

$$(1 - x^2) \int^{n-1} z\, dx + 2nx \int^n z\, dx - n(n+1) \int^{n+1} z\, dx,$$

wodurch die vorige Gleichung in folgende übergeht

$$(1 - x^2) \int^{n-1} z\, dx - 2nx \int^n z\, dx = 2A (x^2 - 1)^n$$

oder

$$\frac{d.}{dx} \frac{\int^n z\, dx}{(1 - x^2)^n} = \frac{(-1)^n \cdot 2A}{1 - x^2}$$

Hieraus ergibt sich

$$\int^n z\, dx = A (x^2 - 1)^n \left[\log \frac{1+x}{1-x} + C'' \right]$$

wo C'' eine willkürliche Constante ist, und folglich ist

$$z = A \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \log \frac{1+x}{1-x} \right] + C'' X^n$$

ein Integral der Gleichung (α). Vergleicht man dieses Integral mit dem vollständigen Integral (β.), so sieht man sogleich, dass es mit jenem übereinstimmen muss, wenn man darin $C = 1$ setzt.

Es ist daher

$$X_n \log \frac{1+x}{1-x} - Z_n = A \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \log \frac{1+x}{1-x} \right] \qquad (1.$$

Digitized by Google

Entwickelt man diesen Differentialcoefficienten nach der Formel

$$\frac{d^n vw}{dx^n} = v\frac{d^n w}{dx^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}w}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}w}{dx^{n-2}} + \cdots$$

so sieht man, dass das erste Glied $= X_n \log\frac{1+x}{1-x}$ ist, das in Y_n nur halb enthalten ist, während Z_n die folgenden Glieder umfasst.

$$Z_n = -A\left[n\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,\frac{d\log\frac{1+x}{1-x}}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\,\frac{d^2.\log\frac{1+x}{1-x}}{dx^2}\cdots\right]$$

Es ergibt sich ferner aus den Gleichungen 4. und 6. (n°. 4), dass

$$\frac{1}{2}\left(X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n\right) = \frac{2n+3}{1.(2n+2)}X_{n+1} + \frac{2n+7}{3(2n+4)}\cdot X_{n+2} + \cdots$$

Da in dieser Entwicklung die Glieder von X_0 bis X_n fehlen, so folgt, wenn wir den Ausdruck $X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n$ mit U_n bezeichnen, dass

$$\int_{-1}^{+1} U_n X_m\,dx = 0$$

wenn m < oder = n ist. Für m > n ist der Werth dieses Integrals $= \frac{4}{(m-n)(m+n+1)}$, wenn m+n ungerade, = 0, wenn m+n gerade ist.

Wie also $\int_{-1}^{+1} X_m \varphi\,dx = 0$ ist, wenn φ irgend ein Polynom von niedrigerem Grade als dem n^{ten} ist, so besitzt auch U_n die merkwürdige Eigenschaft, dass

$$\int_{-1}^{+1} U_n \varphi\,dx = 0\,, \qquad (2.$$

wenn φ ein beliebiges Polynom vom n^{ten} oder niedrigerem Grade ist.

Digitized by Google

Note II.

Von den Gauss'schen Formeln

für

mechanische Quadratur.

Das Vorhergehende steht in so engem Zusammenhange mit den Gauss'schen Formeln für mechanische Quadratur, dass ich diesen Gegenstand kurz berühren will.

Da im Allgemeinen jede Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = +1$ und $x = -1$ in eine convergente Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \cdots$$

entwickelt werden kann, so kann man sich dieser Reihe auch zwischen diesen Grenzen zur Interpolation bedienen. Sind von einer Funktion y die n Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ gegeben, so kann man setzen

$$y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \cdots + A_{n-1} X_{n-1} \qquad \text{I.}$$

und man erhält sodann durch Bestimmung der Constanten A eine Interpolationsformel, welche der Formel

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

entspricht, in welcher aber die Glieder so geordnet sind, dass das erste Glied zugleich den entsprechenden Werth des Integrals $\int_{-1}^{+1} y\,dx$ gibt.

Digitized by Google

Es ist nämlich

$$\int_{-1}^{+1} y\,dx = 2A_0 \qquad \text{II.}$$

Bezeichnet man mit $X'_1, X'_2, X'_3, \ldots$ die Werthe von $X_1, X_2, X_3, \ldots$ welche dem ersten Argumentenwerthe entsprechen, mit $X''_1, X''_2, X''_3 \ldots$ diejenigen, welche dem zweiten Argumentenwerthe entsprechen u. s. f., so ergibt sich A_0 unmittelbar aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= A_0 + A_1 X'_1 + A_2 X'_2 + \cdots + A_{n-1} X_{n-1} \\ y_2 &= A_0 + A_1 X''_1 + A_2 X''_2 + \cdots + A_{n-1} X''_{n-1} \\ y_3 &= A_0 + A_1 X'''_1 + A_2 X'''_2 + \cdots + A_{n-1} X'''_{n-1} \end{aligned} \qquad \text{III.}$$

u. s. f.

Entspricht jedem positiven Argument ein negatives von gleichem numerischen Werthe, so sind die entsprechenden X mit geradem Index gleich, während die entsprechenden X mit ungeradem Index gleiche numerische Werthe mit entgegengesetzten Zeichen haben. Man sieht sodann, dass der Werth der Coefficienten A mit geradem Index nur von den Summen $y_1 + y_n$, $y_1 + y_{n-1}$, u s. f. abhängt, hingegen der der Coefficienten A mit ungeradem Index nur von den Differenzen $y_n - y_1$, $y_{n-1} - y_2$, u. s. f. Es ist also A_0 von der Form

$$A_0 = R_1 (y_1 + y_n) + R_2 (y_2 + y_{n-1}) + \cdots \qquad \text{IV.}$$

Bilden die Argumente eine arithmetische Reihe, so findet man aus den Gleichungen III. sogleich für A_0 die cotesischen Formeln. Frägt man sich aber, welche Argumentenwerthe die vortheilhaftesten sind, wenn man nicht mehr als n anwenden will, so ergibt sich leicht die Antwort; da nämlich die Constante A_0 um so genauer bestimmt wird, je mehr Glieder der Reihe (I.) berücksichtigt werden, so werden diejenigen Werthe von x, welche das nächste Glied der Reihe I. Null machen, oder die Wurzeln der Gleichung

$$X_n = 0 \qquad \text{V.}$$

auch die vortheilhaftesten Abscissen für die mechanische Quadratur darstellen.

Die Gleichung V ist dieselbe, welche Gauss zur Bestimmung dieser Abscissen gefunden hat; nur muss man darin statt x die neue Veränderliche $2x' - 1$. einführen, wenn man von $x = 0$ bis $x = 1$ integrirt, indem

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(2x' - 1)\,dx' \quad \text{oder} \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{x'+1}{2}\right) dx$$

Digitized by Google

Da die Gleichung V. je zwei numerisch gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen hat (die Wurzel o, wenn n ungerade ist, ausgenommen), so hat auch in diesem Falle A_0 die Form IV. Aber es handelt sich nun um die Bestimmung der Coefficienten R. Man könnte zwar dieselben in jedem Falle unmittelbar aus den Gleichungen III. finden, was jedoch sehr umständlich wäre. Gauss hat eine Methode angegeben, um dieselben für jede gegebene Anzahl von Argumenten zu berechnen, aber ein ziemlich einfacher, allgemeiner Ausdruck für diese Coefficienten mittelst der Wurzeln der Gleichung V. ergibt sich auf folgende Weise.

Sind $\pm\alpha, \pm\beta, +\gamma, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $X_n = o$ und y_1, $y_2, \ldots y_n$ die n diesen Wurzeln entsprechenden Werthe von y, so lässt sich bekanntlich die Lagrange'sche Interpolationsformel, von welcher die Gleichung I. nur durch die Anordnung der Glieder verschieden ist, auf folgende Art schreiben.

$$y = \frac{\frac{X_n}{x-\alpha}}{\varphi(\alpha)} y_1 + \frac{\frac{X_n}{x-\beta}}{\varphi(\beta)} y_2 + \frac{\frac{X_n}{x-\gamma}}{\varphi(\gamma)} y_3 + \cdots$$

wo $\varphi(x) = \frac{dX_n}{dx}$ ist.

Hieraus folgt

$$\int_{-1}^{+1} y\,dx = \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{x-\alpha}\,dx}{\varphi(\alpha)} y_1 + \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{x-\beta}\,dx}{\varphi(\beta)} y_2 + \cdots$$

Wir hatten nun früher gefunden (Gl. 26, n°. 15)

$$\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{\alpha-x}\,dx = (Y_n)_\alpha,$$

wenn $(Y_n)_\alpha$ das bezeichnet, was $Y = \frac{1}{2} X_n \log\frac{x+1}{x-1} - Z_n$ wird, wenn man α statt x setzt. Diese Gleichung lässt sich hier jedoch nicht unmittelbar anwenden, weil sie im Allgemeinen nur gilt, wenn $\alpha > 1$ ist, während alle Wurzeln der Gleichung $X_n = o$ kleiner als 1 sind. Entwickelt man aber Y_n für $x < 1$ oder $\frac{1}{2} X_n \log\frac{1+x}{1-x} - Z_n$ nach steigenden Potenzen von x in eine Reihe, wie wir

Digitized by Google

diess in n°. 10 für $x > 1$ gethan haben, so überzeugt man sich leicht, dass in dieser Reihe der Coefficient von x^m durch das Integral $-\int \frac{X_n}{x^{m+1}}\,dx$ dargestellt werden kann, wenn man nach der Integration $x = 1$ setzt.

Wir erhalten dadurch

für gerade n,

$$(Y_n)_\alpha = -\int X_n \left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \cdots\right) dx = -\left[\int \frac{X_n \cdot \alpha}{x^2-\alpha^2}\,dx\right]$$

für ungerade n,

$$(Y_n)_\alpha = -\int X_n \left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \cdots\right) dx = -\left[\int \frac{X_n \cdot x}{x^2-\alpha^2}\,dx\right] \quad 1.$$

wo die Klammern [ ] bezeichnen, dass nach der Integration $x = 1$ zu setzen ist.

Ist nun α eine Wurzel der Gleichung $X_n = 0$, so ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein Polynom und bleibt mithin endlich zwischen den Grenzen $x = +1$ und $x = -1$; ferner haben die Integrale für $x = +1$ und $x = -1$ gleiche, aber entgegengesetzte Werthe und man kann daher beide Integrale in bestimmte Integrale, zwischen den Grenzen $x = +1$ und $x = -1$ genommen, verwandeln, dadurch wird für gerade n

$$\left[\int \frac{X_n \cdot \alpha}{x^2-\alpha^2}\,dx\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n \cdot \alpha}{x^2-\alpha^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{x-\alpha}\,dx$$

und für ungerade ebenfalls

$$\left[\int \frac{X_n \cdot x}{x^2-\alpha^2}\,dx\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n \cdot x}{x^2-\alpha^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{x-\alpha}\,dx .$$

Zugleich wird in diesem Falle $(Y_n)_\alpha = -(Z_n)_\alpha$ und es ist also, wenn α eine Wurzel der Gleichung $X_n = 0$ ist,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{x-\alpha}\,dx = (Z_n)_\alpha \qquad 2.$$

Digitized by Google

Aus Gleichung c (n° 2.) folgt aber, wenn man $x = \alpha$ setzt

$$(Z_n)_\alpha = B_\alpha . \alpha \left(\frac{X_n}{x^2 - \alpha^2} \right)_\alpha$$

wenn man statt des dortigen B_1 der leichtern Uebersicht wegen B_α schreibt. Ferner ist

$$\varphi(\alpha) = \left(\frac{dX_n}{dx} \right)_\alpha = 2\alpha \left(\frac{X_n}{x^2 - \alpha^2} \right)_\alpha$$

wie man sogleich findet, wenn man von der Gleichung $X_n = M(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)\ldots$ den Logarithmus nimmt und dann differenzirt. Nur für die Wurzel $x = o$, bei ungeraden n ist

$$\varphi(o) = \left(\frac{dX_n}{dx} \right)_o = \left(\frac{X_n}{x} \right)_o .$$

Hiedurch wird nun die obige Gleichung für $\int_{-1}^{+1} y dx$

$$\int_{-1}^{+1} y dx = B_\alpha . y_1 + B_\beta . y_2 + B_\gamma . y_3 + \ldots \qquad \text{VI.}$$

wobei zu bemerken ist, dass bei einer ungeraden Anzahl von Argumenten der der Wurzel $x = o$ entsprechende Functionswerth den Coefficienten $2B_o$ hat. Die Gauss'schen Coefficienten fallen mithin mit den Grössen $\frac{1}{2}B_\alpha$, $\frac{1}{2}B_\beta$, ... B_o zusammen und sind durch die in n° 2 gefundenen Ausdrücke für B als Funktionen der Wurzeln der Gleichung $X_n = o$ gegeben.

Führt man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung VI. ein, so erhält man folgende Formel für die mechanische Quadratur:
für gerade n,

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \Sigma \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{M^2 2\alpha^2 (1-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)^2 (\alpha^2-\gamma^2)^2 \ldots} \qquad \text{VII.}$$

für ungerade n

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \Sigma \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{M^2 2\alpha^2 (1-\alpha^2)(\alpha^2-\beta^2)^2 (\alpha^2-\gamma^2)^2 \ldots}$$

$$+ 2 . \left(\frac{2.4.6..n-1}{3.5.7..n} \right)^2 . f(o) \qquad \text{VIII.}$$

Digitized by Google

wo in beiden Fällen $M = \frac{1.3.5..2n-1}{1.2.3...n}$ ist, und sich das Summenzeichen auf alle positiven Wurzeln der Gleichung $X_n = o$ (die Wurzel $x = o$ ausgenommen) erstreckt.

Zwischen den Coefficienten B finden ferner folgende Relationen statt:

$$\Sigma\, B_\alpha\, \alpha^{2m} = \frac{1}{2m+1}$$

für jede ganze Zahl m, von $m = o$ bis $m = n-1$, und

$$\Sigma\, B_\alpha\, \alpha^{2n} = \frac{1}{2n+1}\left[1-\left(\frac{1.2.3..n}{1.3.5..(n-1)}\right)^2\right]$$

Diese beiden Gleichungen ergeben sich aus der Bestimmung des Fehlers der Quadraturformel.

Ausserdem folgt aus n° 2

$$\Sigma \frac{B_\alpha}{1-\alpha^2} = (Z_n)_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\Sigma\, B_\alpha \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} = \left(\frac{Q}{X_n^2}\right)_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

wo sich die Summen Σ auf alle Wurzeln der Gleichung $X_n = o$ erstrecken, die Wurzel $x = o$ einbegriffen.

Obwohl die hier betrachtete Quadraturformel für eine sehr grosse Anzahl von Argumenten nicht anwendbar ist, so könnte man sich doch fragen, was aus ihr in diesem Falle wird. Bedient man sich zur Beantwortung dieser Frage der in n° 6 gegebenen Näherungswerthe von X_n und Z_n, so ergibt sich für den Coefficienten von $f(\alpha)$ in der Quadraturformel der Näherungswerth

$$\frac{2(Z_n)_\alpha}{\left(\frac{dX_n}{dx}\right)} = \frac{2\pi}{2n+1}\sqrt{1-\alpha^2}$$

Die Wurzeln α selbst aber sind näherungsweise durch den Ausdruck

$$\alpha = \cos\frac{4i+3}{4n+2}\pi$$

Digitized by Google

Digitized by Google